

IPhO 1972

Problemas teóricos y soluciones · Bucarest, Rumanía · 4 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1972/

Problema 1: Tres cilindros sobre un plano inclinado

Tres cilindros de la misma masa, la misma longitud y el mismo radio exterior se encuentran inicialmente en reposo sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento por deslizamiento sobre el plano inclinado, μ , es conocido y tiene el mismo valor para todos los cilindros. El primer cilindro está vacío (es un tubo), el segundo es macizo y homogéneo, y el tercero tiene una cavidad exactamente igual a la del primero, pero cerrada con dos tapas de masa despreciable y llena de un líquido de la misma densidad que las paredes del cilindro. El rozamiento entre el líquido y la pared del cilindro se considera despreciable. La densidad del material del primer cilindro es n veces la del segundo o del tercer cilindro.

Determine:

- La aceleración lineal de los cilindros en el caso sin deslizamiento. Compare todas las aceleraciones.
- La condición que debe cumplir el ángulo α del plano inclinado para que ninguno de los cilindros deslice.
- Las razones entre las aceleraciones angulares en el caso de rodadura con deslizamiento de los tres cilindros. Compare estas aceleraciones.
- La fuerza de interacción entre el líquido y las paredes del cilindro en el caso de deslizamiento de este cilindro, sabiendo que la masa del líquido es m_l .

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Sea R el radio exterior común y β_i la aceleración angular de la parte sólida del cilindro i . Sea $\hat{e}_{\parallel}$ el vector unitario dirigido cuesta abajo y $\hat{e}_{\perp}$ el vector unitario normal al plano y dirigido hacia fuera de él. Las comparaciones siguientes suponen cavidades de tamaño no nulo, $n > 1$, y $0 < \alpha < \pi/2$.

- **a)** Las aceleraciones cuesta abajo son

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1}g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1}g \sin \alpha$$

y

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

- **b)** Si el valor dado de μ también representa el coeficiente de rozamiento estático límite,

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

El cilindro 1 determina la condición límite. Si μ designa estrictamente el rozamiento cinético, también se necesitan los coeficientes de rozamiento estático para obtener una condición exacta de ausencia de deslizamiento.

- **c)** Para un rozamiento por deslizamiento no nulo,

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

De forma equivalente, las inversas de las aceleraciones satisfacen

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n^2}.$$

- **d)** La fuerza resultante que ejercen las paredes sobre el líquido es

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

Por tanto, el módulo de la fuerza de interacción es

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

La fuerza sobre el líquido forma un ángulo $\arctan \mu$ con la normal exterior, hacia el lado de subida del plano. La fuerza sobre las paredes tiene igual módulo y sentido opuesto.

Solución

Sean M la masa total común, L la longitud común y r el radio de la cavidad de los cilindros 1 y 3. Denotemos por ρ la densidad del cilindro 2, de las paredes del cilindro 3 y de su líquido. El cilindro 1 tiene densidad $n\rho$.

La igualdad de las masas da

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

Por tanto,

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n-1}{n}.$$

En consecuencia, la masa de la envoltura del tercer cilindro y la masa de su líquido son

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n-1}{n}.$$

Consideramos los cilindros rígidos, despreciamos la resistencia a la rodadura y modelizamos el líquido completamente confinado como incompresible y no viscoso. La rotación de la pared circular no impone un movimiento tangencial a este líquido. Las fuerzas de presión no ejercen ningún momento respecto al eje del cilindro, por lo que el líquido, que inicialmente no gira, se traslada con el cilindro sin girar.

Así, toda la masa M contribuye a la traslación, pero solo la envoltura contribuye a la inercia de rotación del cilindro 3. Utilizando el momento de inercia axial $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ de un cilindro anular homogéneo,

$$I_1 = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{M}{n}(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n^2}.$$

Aquí I_3 designa el momento de inercia de la envoltura que gira.

Definamos los momentos de inercia adimensionales

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

a) Aceleraciones lineales sin deslizamiento

Sea f_i la fuerza de rozamiento estático, dirigida cuesta arriba. La segunda ley de Newton a lo largo del plano y la ecuación de rotación respecto al eje del cilindro dan

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

Para la rodadura sin deslizamiento,

$$a_i = R\beta_i.$$

Por tanto,

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = Mk_i a_i,$$

y, en consecuencia,

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

Sustituyendo los tres momentos de inercia,

$$\boxed{a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.}$$

Para $n > 1$,

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

Como a_i disminuye al aumentar k_i ,

$$\boxed{a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.}$$

El cilindro lleno de líquido tiene la mayor aceleración porque su líquido aporta masa a la traslación sin aportar inercia a la rotación.

b) Condición para que todos los cilindros rueden sin deslizar

No hay aceleración normal al plano, de modo que cada cilindro tiene una reacción normal

$$N = Mg \cos \alpha.$$

El rozamiento estático necesario para la rodadura es

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

lo que da

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

Para distinguir explícitamente entre el rozamiento estático y el rozamiento por deslizamiento, sea $\mu_{s,i}$ el coeficiente de rozamiento estático límite del cilindro i . Los tres pueden rodar sin deslizar si y solo si

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2+2n-1}{2n-1} \right\}.$$

En la idealización habitual con un único coeficiente, $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$. Como $k_1 > k_2 > k_3$, el cilindro 1 requiere el mayor rozamiento en relación con su reacción normal y, por tanto, determina el límite:

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{o} \quad \alpha \leq \arctan \left(\mu \frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

La igualdad corresponde al rozamiento estático límite del cilindro 1.

c) Razones entre las aceleraciones angulares cuando los tres deslizan

En el régimen estipulado, los cilindros deslizan cuesta abajo respecto al plano. El rozamiento cinético actúa cuesta arriba y tiene el mismo módulo para cada uno:

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

Por tanto, sus aceleraciones de traslación son iguales:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Sus aceleraciones angulares se obtienen de

$$I_i \beta_i = fR,$$

sin imponer la relación de ausencia de deslizamiento $a = R\beta$. En consecuencia,

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

Al eliminar el factor común se obtiene

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2.$$

Las razones entre ellas son

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n-1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n-1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

Para $n > 1$,

$$2n - 1 > n, \quad n^2 - (2n - 1) = (n - 1)^2 > 0,$$

por lo que

$$\boxed{\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.}$$

Como comprobación de coherencia, el deslizamiento cuesta abajo desde el reposo requiere $a_{sl} - R\beta_i > 0$. En el modelo con un único coeficiente, los tres satisfacen esta condición cuando

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}.$$

El cilindro 3 es el último en comenzar a deslizarse al aumentar la inclinación.

d) Fuerza de interacción entre el líquido y las paredes

El centro de masas del líquido acelera cuesta abajo junto con el cilindro que desliza:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Sean $F_{\parallel}$ y $F_{\perp}$ las componentes de la fuerza resultante que ejercen las paredes sobre el líquido, positivas cuesta abajo y en la dirección normal hacia fuera del plano. Aplicando la segunda ley de Newton únicamente al líquido,

$$\begin{aligned} F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha &= m_l a_{sl}, \\ F_{\perp} - m_l g \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

Estas componentes proceden de la fuerza de presión resultante; una componente cuesta arriba no requiere rozamiento viscoso entre el líquido y la pared. Por tanto,

$$\boxed{\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})}$$

y

$$\boxed{F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.}$$

Su inclinación respecto a la normal exterior, hacia el lado de subida del plano, es

$$\boxed{\theta = \arctan \mu.}$$

Por la tercera ley de Newton, el líquido ejerce la fuerza opuesta sobre las paredes.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Argón y oxígeno en dos cilindros con pistones conectados

Dos cilindros A y B de igual diámetro contienen dos pistones de masa despreciable conectados mediante una varilla rígida. Los pistones pueden moverse libremente. La varilla es un tubo corto provisto de una válvula. Inicialmente, la válvula está cerrada (fig. 2.1).

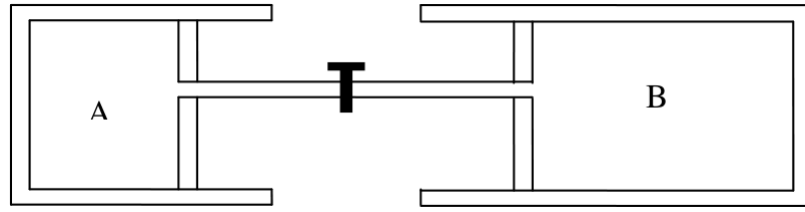


Fig. 2.1

El cilindro A y su pistón están aislados adiabáticamente, y el cilindro B está en contacto térmico con un termostato cuya temperatura es $\theta = 27^\circ\text{C}$.

Inicialmente, el pistón del cilindro A está fijo y en su interior hay una masa $m = 32\text{ kg}$ de argón a una presión superior a la atmosférica. En el interior del cilindro B hay una masa de oxígeno a la presión atmosférica normal.

Al liberar el pistón del cilindro A, este se mueve con suficiente lentitud (de forma cuasiestática) y, en el equilibrio, el volumen del gas es ocho veces el inicial, mientras que en el cilindro B la densidad del oxígeno se ha duplicado. Sabiendo que el termostato ha recibido el calor $Q' = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$, determine:

- Demuestre, a partir de la teoría cinética de los gases y estudiando las colisiones elásticas de las moléculas con el pistón, que la ecuación térmica del proceso que tiene lugar en el cilindro A es $TV^{2/3} = \text{constante}$.
- Calcule los parámetros p , V y T del argón en los estados inicial y final.
- Al abrir la válvula que separa los dos cilindros, calcule la presión final de la mezcla de gases.

La masa kilomolar del argón es $\mu = 40\text{ kg/kmol}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los siguientes son los resultados formales obtenidos a partir de la relación adiabática solicitada, el equilibrio mecánico final y la conservación de la energía total. La descripción del proceso como cuasiestático presenta un problema de coherencia física: al liberar el pistón, el argón está a $64p_0$ y el oxígeno solo a p_0 , por lo que el conjunto de pistones sin masa no puede moverse de forma cuasiestática.

- a) $TV^{2/3} = \text{constante}$, o, de forma equivalente, $pV^{5/3} = \text{constante}$.
- b) Los estados del argón, antes de abrir la válvula, son:

Estado	Presión p	Volumen V	Temperatura T
Inicial	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6\text{ Pa}$	1.03 m^3	$1.00 \times 10^3\text{ K}$
Final	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5\text{ Pa}$	8.20 m^3	250 K

- **c)** Después de abrir la válvula y alcanzar el equilibrio térmico,

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Aquí, p_0 es la presión atmosférica normal.

Solución

Consideramos ambos gases como ideales y despreciamos el volumen del tubo corto de conexión. Utilizamos

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ K}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

La cantidad de argón es

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ kmol}.$$

Los subíndices 1 y 2 indican el estado inicial y el estado de equilibrio alcanzado con la válvula todavía cerrada.

a) Deducción a partir de las colisiones moleculares

Sea S el área del pistón del argón, que se mueve hacia fuera con una rapidez u , pequeña en comparación con las velocidades térmicas moleculares. Consideremos un átomo de argón de masa m_0 que se aproxima al pistón con una componente de velocidad v_x perpendicular a este.

En el sistema de referencia instantáneo en reposo respecto al pistón, una colisión elástica invierte la componente normal de la velocidad. Por tanto, en el sistema de referencia del laboratorio,

$$v'_x = 2u - v_x.$$

Las demás componentes de la velocidad permanecen inalteradas. Por lo tanto, la variación de energía del átomo es

$$\Delta\varepsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0 u (v_x - u).$$

El impulso transmitido al pistón es

$$I = 2m_0(v_x - u),$$

de modo que

$$\Delta\varepsilon = -uI.$$

Al sumar las contribuciones de las colisiones moleculares, el impulso transmitido por unidad de tiempo es la fuerza $p_A S$. En consecuencia,

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

o bien

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

Para un gas ideal monoatómico en equilibrio, la teoría cinética proporciona

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

Por tanto,

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

La hipótesis de movimiento lento permite que las colisiones intermoleculares mantengan una distribución de velocidades de equilibrio isotrópica.

Al sustituir en la ecuación de la energía, se obtiene

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = - \frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

Por lo tanto,

$$\frac{dT_A}{T_A} = - \frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

Integrando,

$$T_A V_A^{2/3} = \text{constante}.$$

Al combinar esta relación con $p_A V_A = n_A R T_A$, también se obtiene

$$p_A V_A^{5/3} = \text{constante}.$$

b) Estados inicial y final del argón

La expansión del argón indicada en el enunciado implica

$$V_{A2} = 8V_{A1}.$$

Utilizando el apartado a),

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

Así pues,

$$T_{A2} = \frac{1}{4} T_{A1}.$$

La masa de oxígeno permanece inalterada antes de abrir la válvula. Por tanto, la duplicación de su densidad significa que

$$V_{B2} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

En ambos estados extremos de equilibrio, el oxígeno está a la temperatura T_0 del termostato. Su ecuación de gas ideal da entonces

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2p_0.$$

En el equilibrio mecánico final, las fuerzas sobre el conjunto de pistones conectados se compensan. Las fuerzas atmosféricas se anulan entre sí porque las áreas de los pistones son iguales, de modo que

$$p_{A2} = p_{B2} = 2p_0.$$

La relación adiabática del argón da ahora

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

Para determinar las temperaturas, consideramos ambos gases conjuntamente. Los desplazamientos iguales de los pistones y las áreas iguales de sus secciones transversales implican

$$dV_A = -dV_B.$$

Por tanto, el volumen total de los gases es constante y el trabajo neto contra la atmósfera es nulo. El trabajo transmitido a través de la varilla es interno al sistema conjunto. Puesto que los pistones están en reposo en ambos estados extremos, la conservación de la energía total da

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

El oxígeno tiene la misma temperatura inicial y final, por lo que, para un gas ideal,

$$\Delta U_B = 0.$$

Por lo tanto,

$$Q' = \frac{3}{2}n_A R(T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8}n_A R T_{A1}.$$

Con $Q' = 7.479 \times 10^6 \text{ J}$,

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

y

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

Finalmente,

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

y

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

Con tres cifras significativas,

$$\boxed{(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})}$$

y

$$\boxed{(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K})}.$$

c) Presión final después de abrir la válvula

La geometría de los pistones da

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

Utilizando $V_{A2} = 8V_{A1}$ y $V_{B2} = V_{B1}/2$,

$$7V_{A1} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

Por tanto,

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

y el volumen total constante es

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

Después de abrir la válvula, los gases se mezclan y finalmente alcanzan la temperatura T_0 del termostato. Aunque el cilindro A está aislado, su gas puede intercambiar energía a través de la conexión abierta con el cilindro B.

La cantidad de oxígeno, que se conserva, satisface

$$n_B RT_0 = p_0 V_{B1} = 14 p_0 V_{A1}.$$

Para el argón,

$$n_A RT_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64 p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2 p_0 V_{A1}.$$

Al aplicar la ecuación de gas ideal a la mezcla final,

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B) RT_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14) p_0 V_{A1}}{15 V_{A1}}.$$

Por lo tanto,

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 = 2.2133 p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Ascenso de un líquido dieléctrico entre las placas de un condensador cargado

Un condensador plano con placas rectangulares está fijado en posición vertical, con la parte inferior en contacto con un líquido dieléctrico (fig. 3.1)

Determine la altura, h , del líquido entre las placas y explique el fenómeno.

Se desprecian los efectos de capilaridad.

Se supone que la distancia entre las placas es mucho menor que las dimensiones lineales de las placas.

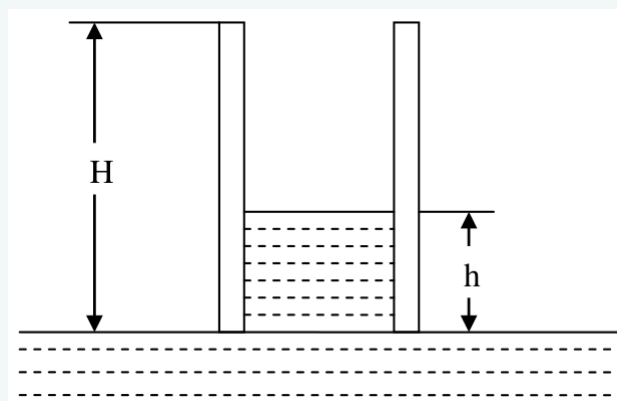


Fig. 3.1

Se conocen: la intensidad inicial del campo eléctrico del condensador cargado, E , la densidad ρ , la permitividad eléctrica relativa ϵ_r del líquido y la altura H de las placas del condensador.

Discusión.

Respuestas

- **Problema 3 — Altura:** Suponiendo que el condensador cargado está aislado, sea $a = \varepsilon_r - 1 > 0$. Sea h_* la única solución no negativa de

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

La altura de equilibrio es $h = h_*$ cuando $h_* < H$. El líquido llena el espacio entre las placas hasta el extremo superior, $h = H$ en la aproximación ideal, cuando

$$E \geq E_c = \varepsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}}.$$

- **Problema 3 — Explicación y discusión:** La polarización produce una fuerza eléctrica dirigida hacia arriba. En un equilibrio con ascenso parcial, la presión que ejerce equilibra la presión hidrostática:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\varepsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

Este equilibrio es único y estable. No hay ascenso si $E = 0$ o $\varepsilon_r = 1$.

- **Problema 3 — Alternativa con tensión constante:** Si, en cambio, una fuente mantiene la tensión inicial, el resultado es

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2\rho g} \right\}.$$

Solución

Problema 3. La referencia al campo *inicial*, junto con la ausencia de una fuente de tensión especificada, sugiere que se trata de un condensador aislado, cuya carga libre permanece constante. Resolvemos primero este caso.

Sean b la anchura de las placas y d su separación, y situemos la superficie exterior del líquido en $z = 0$. Consideramos que el depósito es lo suficientemente grande como para que este nivel permanezca fijo. El líquido es un dieléctrico lineal, homogéneo e incompresible; el aire tiene permitividad ε_0 . Se desprecian las correcciones de la capacidad debidas a los efectos de borde, porque d es mucho menor que las dimensiones de las placas.

Capacidad y campo durante el ascenso. Cuando el líquido ha ascendido hasta una altura $h < H$, las porciones ocupadas por líquido y por aire forman dos condensadores en paralelo. Por tanto,

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b(H - h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

donde

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

Inicialmente, $V_0 = Ed$, de modo que la carga conservada es

$$Q = C_0 Ed.$$

En consecuencia, el campo después del ascenso es

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \boxed{\frac{E}{1 + ah/H}}.$$

Por tanto, el campo disminuye a medida que el líquido entra en el condensador aislado.

Altura de equilibrio. Con carga constante, la energía eléctrica es

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

La energía gravitatoria necesaria para elevar el líquido desde el depósito hasta el espacio entre las placas es

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

Un equilibrio estático minimiza la energía total. Así pues,

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = b d \left[\rho g h - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

Por tanto,

$$\boxed{\rho g h = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

o, de forma equivalente,

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2 \rho g}}.$$

Esta ecuación cúbica determina la altura de equilibrio a partir de las magnitudes proporcionadas. Tanto b como d se cancelan, lo que explica por qué no se necesitan sus valores.

Explicación física. La introducción del dieléctrico aumenta la capacidad y reduce la energía eléctrica a carga constante. La fuerza correspondiente, dirigida hacia arriba, es

$$F_e = - \frac{dU_e}{dh} \bigg|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

Por tanto, su presión eléctrica es

$$p_e = \frac{F_e}{b d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

El líquido asciende hasta que esta presión equilibra la presión hidrostática $\rho g h$ asociada a la columna elevada.

Igualar las energías totales inicial y final describiría, en general, un posible punto de retorno durante el movimiento, en lugar del equilibrio estático. La condición de equilibrio es la anulación de la derivada de la energía utilizada anteriormente.

Discusión.

Para $a > 0$, definamos

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

Para $h \geq 0$,

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

Por tanto, existe exactamente una solución no negativa. Es estable: al aumentar h , aumenta la fuerza gravitatoria dirigida hacia abajo y disminuye la fuerza eléctrica dirigida hacia arriba. Explícitamente,

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = bd \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

La deducción es aplicable a una superficie situada entre los extremos de las placas. Al sustituir $h = H$ en la ecuación de equilibrio se obtiene

$$H\varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_c^2}{2\rho g},$$

lo que da el umbral E_c indicado anteriormente. Si $E > E_c$, no existe un equilibrio con ascenso parcial por debajo del extremo superior: el espacio entre las placas se llena por completo. La forma detallada de la superficie cerca de los bordes superiores o por encima de ellos requiere considerar los campos de borde, que la aproximación de placas paralelas no determina.

Cuando la capacidad cambia solo ligeramente,

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

el campo permanece aproximadamente igual a su valor inicial, y

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g}.$$

En particular, el ascenso tiende a cero cuando $E \rightarrow 0$ o $\varepsilon_r \rightarrow 1$.

Para un condensador aislado, aumentar la permitividad no siempre aumenta el ascenso, porque también reduce el campo. A E, H fijos, el límite de gran permitividad es

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2\rho g(\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

De forma más cuantitativa, sean

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

La ecuación de equilibrio da

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

Antes de imponer el límite geométrico $h \leq H$, el máximo al variar la permitividad es, por tanto,

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

que se alcanza cuando $x = 1$, o $a = 2/\sqrt{B}$. Si este máximo supera H , el llenado completo es posible para un intervalo de permitividades.

Por último, si una fuente de tensión permanece conectada, $V = Ed$ y $\mathcal{E} = E$ permanecen constantes. Teniendo en cuenta la fuente, la energía potencial eléctrica efectiva es $-CV^2/2$. El equilibrio da entonces

$$\rho gh = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2,$$

lo que conduce al resultado para tensión constante indicado en las Respuestas.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 4: Lente planoconvexa entre dos medios; lente dividida de Billet

Una lente delgada planoconvexa de diámetro $2r$, radio de curvatura R e índice de refracción n_o está situada de modo que a su izquierda hay aire ($n_1 = 1$) y a su derecha hay un medio transparente de índice de refracción $n_2 \neq 1$. La cara convexa de la lente está orientada hacia el aire. En el aire, a una distancia s_1 de la lente, medida sobre el eje óptico principal, hay una fuente puntual de luz monocromática.

a) Demuestre, utilizando la aproximación de Gauss, que entre la posición de la imagen, dada por la distancia s_2 a la lente, y la posición de la fuente luminosa existe la relación:

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

donde f_1 y f_2 son las distancias focales de la lente en el aire y en el medio de índice de refracción n_2 , respectivamente.

Observación: Todos los índices de refracción son índices absolutos.

b) La lente se corta perpendicularmente a su cara plana en dos partes iguales. Estas partes se separan una distancia $\delta \ll r$ (lente de Billet). Sobre el eje de simetría del sistema obtenido se coloca una fuente puntual de luz a la distancia s_1 ($s_1 > f_1$) (fig. 4.1). A la derecha de la lente hay una pantalla E a la distancia d . La pantalla es paralela a la cara plana de la lente. En esta pantalla hay N franjas de interferencia si a la derecha de la lente hay aire.

Determine N en función de la longitud de onda.

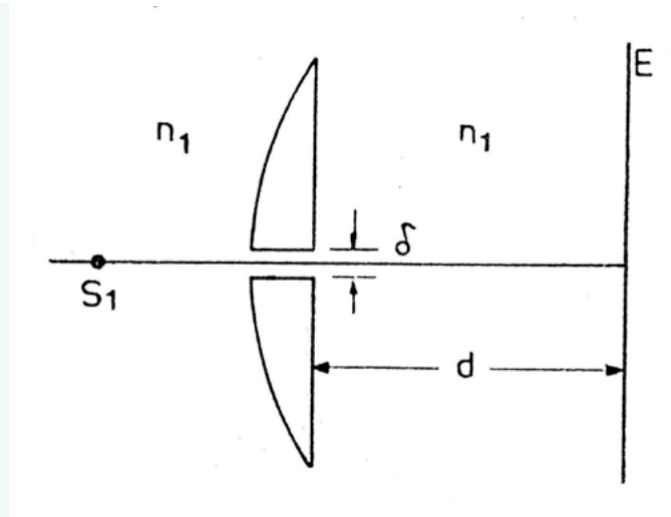


Fig. 4.1

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **a)** Las distancias focales y la ecuación de formación de imágenes son

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}, \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

- **b)** Sea

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f}.$$

Para la posición habitual de la pantalla, en la que los bordes exteriores de la abertura no limitan la zona de interferencia,

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2 (s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - f s_1]}.$$

Esto requiere

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Aquí, N es el recuento habitual obtenido al dividir la anchura de la zona de superposición por la separación entre franjas.

Si se incluye la limitación debida a la abertura finita, el recuento correspondiente es

$$\bar{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max \left\{ 0, \min \left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0 \right] \right\}, & d > v. \end{cases}$$

Para una superposición de anchura positiva, el número entero de máximos luminosos, incluidos los máximos en los límites, es

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\overline{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Solución

a) Refracción en las dos superficies

Utilizamos las aproximaciones de lente delgada y de Gauss: despreciamos la separación entre las dos superficies y conservamos únicamente los términos de primer orden en las alturas y los ángulos de los rayos. Tomamos el sentido de propagación de izquierda a derecha, con s_1 positivo para la fuente real y s_2 positivo para una imagen real.

Consideremos un rayo que incide a una altura y . Su ángulo con el eje óptico es

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

Como el centro de curvatura está a la derecha de la superficie convexa, la normal a la superficie forma un ángulo

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

Sea θ_o el ángulo del rayo dentro de la lente. La ley de Snell en la aproximación de ángulos pequeños da

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

de donde

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

En la cara plana, cuya normal es paralela al eje óptico,

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

Para un rayo que llega a la imagen situada sobre el eje,

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

Al combinar estas ecuaciones y cancelar y , se obtiene

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}.$$

La distancia focal anterior es la distancia de la fuente que hace que los rayos emergentes sean paralelos. Haciendo $s_2 \rightarrow \infty$,

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

La distancia focal posterior es la distancia de la imagen para rayos incidentes paralelos. Haciendo $s_1 \rightarrow \infty$,

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

Por tanto, al dividir la ecuación de formación de imágenes por $(n_o - 1)/R$, se obtiene

$$\boxed{\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1}.$$

La misma relación es válida para imágenes virtuales si s_2 se trata como una distancia con signo.

b) Imágenes formadas por las dos mitades

Ahora ambos medios exteriores son aire, por lo que la distancia focal es

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Cada mitad forma una imagen a la distancia longitudinal v , donde

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f} > 0.$$

Elegimos la coordenada transversal y perpendicular al corte. La separación total mostrada en la figura es δ , por lo que los ejes de las dos mitades se encuentran en

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

Con respecto al eje de cada semilente, la altura de la fuente es $-c_{\pm}$. El aumento transversal es $-v/s_1$, lo que da las posiciones de las imágenes

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

En consecuencia, la separación entre las dos imágenes es

$$\boxed{b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}}.$$

Estas imágenes actúan como fuentes secundarias coherentes. La simetría de reflexión hace que sus fases sean iguales, por lo que la franja central es luminosa.

Separación entre franjas

Para una pantalla situada más allá del plano de las imágenes, sea

$$L = d - v > 0.$$

En la coordenada y de la pantalla, la diferencia de caminos desde las dos imágenes en la aproximación paraxial es

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

Así, las franjas luminosas satisfacen

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

y su separación es

$$\boxed{\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d - v)}{\delta v}}.$$

Son líneas rectas paralelas al corte, dentro de la aproximación paraxial.

Anchura de la zona de superposición de los haces

Utilizamos las envolventes geométricas de los haces y despreciamos la difracción en los bordes de la abertura.

El rayo que pasa por el centro óptico de cada mitad no se desvía. Estos dos rayos llegan a la pantalla en

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Siempre que los bordes exteriores de la abertura no recorten la zona de superposición, su anchura es, por tanto,

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Al dividir esta anchura por la separación entre franjas se obtiene

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Sustituyendo $v = fs_1/(s_1 - f)$,

$$N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}.$$

Para una geometría y un índice de refracción fijos, esta expresión es proporcional a $1/\lambda$.

Condiciones debidas a la abertura finita

El enunciado no especifica la posición de la pantalla con respecto al plano de las imágenes, por lo que también hay que comprobar las condiciones de superposición.

Un rayo que atraviesa la mitad superior a una altura y_0 pasa por su imagen a la altura y_+ . Su altura en la pantalla es

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v} \right) y_0 + \frac{d}{v} y_+.$$

La mitad superior ocupa

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

Para $d > v$, definimos

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

En la sección central de la pantalla, el haz superior ocupa

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

y el haz inferior ocupa

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

Su zona de superposición es simétrica respecto a $y = 0$, con una anchura

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

Por tanto, la expresión habitual N_0 se aplica cuando

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

En el caso de superposición parcial,

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

Esto demuestra la expresión general de $\overline{N} = W/\beta$ dada en las Respuestas. Para $d \leq v$, los dos haces geométricos permanecen en lados opuestos del eje de simetría y no se superponen.

Finalmente, cuando $W > 0$, los máximos luminosos corresponden a los enteros que satisfacen

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

Al incluir los máximos situados exactamente en el límite, se obtiene

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.