

IPhO 1972

Theorieaufgaben und Lösungen · Bukarest, Rumänien · 4 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipro/1972/

Aufgabe 1: Drei Zylinder auf einer schiefen Ebene

Drei Zylinder mit gleicher Masse, gleicher Länge und gleichem Außenradius ruhen anfangs auf einer schiefen Ebene. Der Gleitreibungskoeffizient auf der schiefen Ebene, μ , ist bekannt und hat für alle Zylinder denselben Wert. Der erste Zylinder ist hohl (ein Rohr), der zweite ist ein homogener Vollzylinder, und der dritte besitzt einen Hohlraum genau wie der erste, ist jedoch mit zwei Deckeln von vernachlässigbarer Masse verschlossen und mit einer Flüssigkeit gefüllt, deren Dichte gleich der Dichte der Zylinderwände ist. Die Reibung zwischen der Flüssigkeit und der Zylinderwand wird als vernachlässigbar angesehen. Die Dichte des Materials des ersten Zylinders ist n -mal so groß wie die des zweiten oder des dritten Zylinders.

Bestimmen Sie:

- Die linearen Beschleunigungen der Zylinder beim Rollen ohne Gleiten. Vergleichen Sie alle Beschleunigungen.
- Die Bedingung für den Neigungswinkel α der schiefen Ebene, damit keiner der Zylinder gleitet.
- Die gegenseitigen Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen, wenn alle drei Zylinder unter Gleiten rollen. Vergleichen Sie diese Beschleunigungen.
- Die Wechselwirkungskraft zwischen der Flüssigkeit und den Zylinderwänden beim Gleiten dieses Zylinders, wenn die Flüssigkeitsmasse m_l bekannt ist.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Es sei R der gemeinsame Außenradius und β_i die Winkelbeschleunigung des festen Teils von Zylinder i . Der Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}_{\parallel}$ zeige hangabwärts und $\hat{\mathbf{e}}_{\perp}$ senkrecht von der Ebene weg. Die folgenden Vergleiche setzen echte Hohlräume, $n > 1$, und $0 < \alpha < \pi/2$ voraus.

- a)** Die Beschleunigungen hangabwärts sind

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1}g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2+2n-1}g \sin \alpha$$

und

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

- **b)** Wenn das gegebene μ zugleich den Haftreibungskoeffizienten an der Haftgrenze bezeichnet, gilt

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

Zylinder 1 bestimmt die Grenzbedingung. Wenn μ ausschließlich die Gleitreibung beschreibt, werden für eine exakte Bedingung für das Rollen ohne Gleiten zusätzlich die Haftreibungskoeffizienten benötigt.

- **c)** Bei von null verschiedener Gleitreibung gilt

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Gleichwertig dazu gilt für die Kehrwerte der Beschleunigungen

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n^2}.$$

- **d)** Die von den Wänden auf die Flüssigkeit ausgeübte resultierende Kraft ist

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

Der Betrag der Wechselwirkungskraft ist somit

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Die Kraft auf die Flüssigkeit bildet mit der von der Ebene weg gerichteten Normalen einen Winkel von $\arctan \mu$ in Richtung hangaufwärts. Die Kraft auf die Wände ist gleich groß und entgegengesetzt gerichtet.

Lösung

Die gemeinsame Gesamtmasse sei M , die gemeinsame Länge L und der Hohlraumradius der Zylinder 1 und 3 sei r . Die Dichte von Zylinder 2, der Wände von Zylinder 3 und seiner Flüssigkeit werde mit ρ bezeichnet. Zylinder 1 hat die Dichte $n\rho$.

Aus der Gleichheit der Massen folgt

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

Damit gilt

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Die Masse der Hülle des dritten Zylinders und seine Flüssigkeitsmasse sind folglich

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n-1}{n}.$$

Wir behandeln die Zylinder als starr, vernachlässigen den Rollwiderstand und modellieren die vollständig eingeschlossene Flüssigkeit als inkompressibel und reibungsfrei. Die Rotation der kreisförmigen Wand zwingt dieser Flüssigkeit keine tangentielle Bewegung auf. Die Druckkräfte üben

kein Drehmoment um die Zylinderachse aus, sodass sich die anfangs nicht rotierende Flüssigkeit mit dem Zylinder translatorisch bewegt, ohne sich zu drehen.

Somit trägt die gesamte Masse M zur Translation bei, zum Trägheitsmoment von Zylinder 3 jedoch nur die Hülle. Mit dem axialen Trägheitsmoment $\frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$ eines homogenen Hohlzylinders ergibt sich

$$I_1 = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n},$$

$$I_2 = \frac{1}{2}MR^2,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{M}{n}(R^2 + r^2) = MR^2 \frac{2n-1}{2n^2}.$$

Dabei bezeichnet I_3 das Trägheitsmoment der rotierenden Hülle.

Wir definieren die dimensionslosen Trägheitsmomente

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

a) Lineare Beschleunigungen ohne Gleiten

Es sei f_i die hangaufwärts gerichtete Haftreibungskraft. Das zweite Newtonsche Gesetz entlang der Ebene und die Bewegungsgleichung für die Rotation um die Zylinderachse ergeben

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

Für das Rollen ohne Gleiten gilt

$$a_i = R\beta_i.$$

Daraus folgt

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = M k_i a_i,$$

und damit

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

Einsetzen der drei Trägheitsmomente liefert

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.$$

Für $n > 1$ gilt

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

Da a_i mit zunehmendem k_i abnimmt, gilt

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

Der mit Flüssigkeit gefüllte Zylinder wird am stärksten beschleunigt, weil seine Flüssigkeit die translatorisch bewegte Masse erhöht, ohne zum Trägheitsmoment der rotierenden Teile beizutragen.

b) Bedingung dafür, dass alle Zylinder ohne Gleiten rollen

Senkrecht zur Ebene tritt keine Beschleunigung auf, daher wirkt auf jeden Zylinder die Normalkraft

$$N = Mg \cos \alpha.$$

Die zum Rollen erforderliche Haftreibungskraft ist

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

woraus folgt

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

Um Haft- und Gleitreibung ausdrücklich zu unterscheiden, bezeichne $\mu_{s,i}$ den Haftreibungskoeffizienten an der Haftgrenze für Zylinder i . Alle drei können genau dann ohne Gleiten rollen, wenn

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2+2n-1}{2n-1} \right\}.$$

Bei der üblichen Idealisierung mit einem einzigen Reibungskoeffizienten gilt $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$. Da $k_1 > k_2 > k_3$, benötigt Zylinder 1 im Verhältnis zu seiner Normalkraft die größte Reibungskraft und bestimmt daher die Grenze:

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{oder} \quad \alpha \leq \arctan \left(\mu \frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

Gleichheit entspricht dem Erreichen der Haftgrenze bei Zylinder 1.

c) Verhältnisse der Winkelbeschleunigungen, wenn alle drei Zylinder gleiten

Im vorausgesetzten Bewegungszustand gleiten die Zylinder relativ zur Ebene hangabwärts. Die Gleitreibung wirkt hangaufwärts und hat bei allen denselben Betrag:

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

Ihre translatorischen Beschleunigungen sind daher gleich:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Ihre Winkelbeschleunigungen folgen aus

$$I_i \beta_i = fR,$$

ohne die Rollbedingung $a = R\beta$ aufzuerlegen. Folglich gilt

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

Kürzen des gemeinsamen Faktors ergibt

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2.$$

Die gegenseitigen Verhältnisse sind

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n-1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n-1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

Für $n > 1$ gilt

$$2n-1 > n, \quad n^2 - (2n-1) = (n-1)^2 > 0,$$

also

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

Zur Konsistenzprüfung: Damit aus der Ruhe ein Gleiten hangabwärts einsetzt, muss $a_{sl} - R\beta_i > 0$ gelten. Im Modell mit einem einzigen Reibungskoeffizienten erfüllen alle drei diese Bedingung, wenn

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}.$$

Mit zunehmender Neigung beginnt Zylinder 3 als letzter zu gleiten.

d) Wechselwirkungskraft zwischen der Flüssigkeit und den Wänden

Der Schwerpunkt der Flüssigkeit wird mit dem gleitenden Zylinder hangabwärts beschleunigt:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

Es seien $F_{\parallel}$ und $F_{\perp}$ die Komponenten der von den Wänden auf die Flüssigkeit ausgeübten resultierenden Kraft, mit positiver Richtung hangabwärts beziehungsweise senkrecht von der Ebene weg. Die Anwendung des zweiten Newtonschen Gesetzes auf die Flüssigkeit allein ergibt

$$\begin{aligned} F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha &= m_l a_{sl}, \\ F_{\perp} - m_l g \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

Diese Komponenten ergeben sich aus der resultierenden Druckkraft; eine hangaufwärts gerichtete Komponente erfordert keine viskose Reibung zwischen der Flüssigkeit und der Wand. Daher gilt

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$$

und

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

Ihr Neigungswinkel gegenüber der von der Ebene weg gerichteten Normalen in Richtung hangaufwärts ist

$$\theta = \arctan \mu.$$

Nach dem dritten Newtonschen Gesetz übt die Flüssigkeit die entgegengesetzte Kraft auf die Wände aus.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Argon und Sauerstoff in zwei Zylindern mit verbundenen Kolben

In zwei Zylindern A und B mit gleichem Durchmesser befinden sich zwei Kolben von vernachlässigbarer Masse, die durch eine starre Stange miteinander verbunden sind. Die Kolben können sich frei bewegen. Die Stange ist ein kurzes Rohr mit einem Ventil. Das Ventil ist zunächst geschlossen (Abb. 2.1).

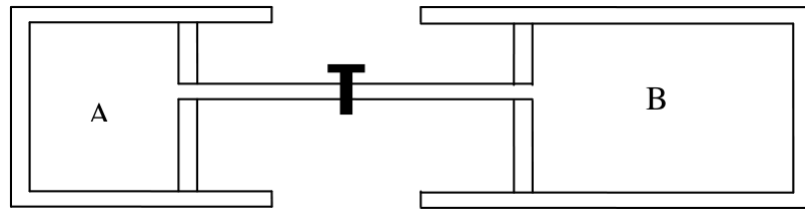


Abb. 2.1

Der Zylinder A und sein Kolben sind adiabatisch isoliert, und der Zylinder B steht in thermischem Kontakt mit einem Thermostaten, dessen Temperatur $\theta = 27^\circ\text{C}$ beträgt.

Anfangs ist der Kolben des Zylinders A fixiert, und im Zylinder befindet sich Argon der Masse $m = 32\text{ kg}$ unter einem Druck, der höher als der Atmosphärendruck ist. Im Zylinder B befindet sich eine Menge Sauerstoff unter normalem Atmosphärendruck.

Wird der Kolben des Zylinders A freigegeben, bewegt er sich hinreichend langsam (quasistatisch), und im Gleichgewicht ist das Gasvolumen auf das Achtfache gestiegen, während sich im Zylinder B die Dichte des Sauerstoffs verdoppelt hat. Der Thermostat hat dabei die Wärme $Q' = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$ aufgenommen. Bestimmen Sie:

- Zeigen Sie auf der Grundlage der kinetischen Gastheorie durch Untersuchung der elastischen Stöße der Moleküle mit dem Kolben, dass die thermische Prozessgleichung für den im Zylinder A ablaufenden Vorgang $TV^{2/3} = \text{konstant}$ lautet.
- Berechnen Sie die Zustandsgrößen p , V und T des Argons im Anfangs- und Endzustand.
- Berechnen Sie den Enddruck des Gasgemisches nach dem Öffnen des Ventils, das die beiden Zylinder voneinander trennt.

Die kilomolare Masse von Argon beträgt $\mu = 40\text{ kg/kmol}$.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die folgenden formalen Ergebnisse ergeben sich aus der geforderten Adiabatenbeziehung, dem mechanischen Gleichgewicht im Endzustand und der Gesamtenergieerhaltung. Die Formulierung als quasistatischer Vorgang weist eine physikalische Unstimmigkeit auf: Beim Freigeben des Kolbens herrscht im Argon der Druck $64p_0$, im Sauerstoff aber nur p_0 , sodass sich die masselose Kolbenanordnung nicht quasistatisch bewegen kann.

- a)** $TV^{2/3} = \text{konstant}$, gleichbedeutend mit $pV^{5/3} = \text{konstant}$.
- b)** Die Zustände des Argons vor dem Öffnen des Ventils sind:

Zustand	Druck p	Volumen V	Temperatur T
Anfangszustand	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6\text{ Pa}$	1.03 m^3	$1.00 \times 10^3\text{ K}$
Endzustand	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5\text{ Pa}$	8.20 m^3	250 K

- **c)** Nach dem Öffnen des Ventils und dem Erreichen des thermischen Gleichgewichts gilt

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Hierbei ist p_0 der normale Atmosphärendruck.

Lösung

Beide Gase werden als ideal behandelt, und das Volumen des kurzen Verbindungsrohrs wird vernachlässigt. Wir verwenden

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ K}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

Die Stoffmenge des Argons beträgt

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ kmol}.$$

Die Indizes 1 und 2 bezeichnen den Anfangszustand und den bei noch geschlossenem Ventil erreichten Gleichgewichtszustand.

a) Herleitung aus molekularen Stößen

Der Argonkolben habe die Fläche S und bewege sich mit der Geschwindigkeit u nach außen, wobei diese klein gegenüber den thermischen Geschwindigkeiten der Moleküle ist. Wir betrachten ein Argonatom der Masse m_0 , das sich dem Kolben mit der Geschwindigkeitskomponente v_x senkrecht zur Kolbenfläche nähert.

Im momentanen Ruhesystem des Kolbens kehrt ein elastischer Stoß die normale Geschwindigkeitskomponente um. Im Laborsystem gilt daher

$$v'_x = 2u - v_x.$$

Die anderen Geschwindigkeitskomponenten bleiben unverändert. Die Energieänderung des Atoms ist somit

$$\Delta \varepsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0 u (v_x - u).$$

Der auf den Kolben übertragene Impuls ist

$$I = 2m_0 (v_x - u),$$

also

$$\Delta \varepsilon = -uI.$$

Summiert man über die molekularen Stöße, so ist der pro Zeiteinheit übertragene Impuls gleich der Kraft $p_A S$. Folglich gilt

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

oder

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

Für ein einatomiges ideales Gas im Gleichgewicht liefert die kinetische Gastheorie

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

Daraus folgt

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

Die Annahme einer langsamen Bewegung ermöglicht es, dass die Stöße zwischen den Teilchen eine isotrope Geschwindigkeitsverteilung im Gleichgewicht aufrechterhalten.

Einsetzen in die Energiegleichung ergibt

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = - \frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

Somit gilt

$$\frac{dT_A}{T_A} = - \frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

Durch Integration erhält man

$$T_A V_A^{2/3} = \text{konstant}.$$

Zusammen mit $p_A V_A = n_A R T_A$ ergibt sich außerdem

$$p_A V_A^{5/3} = \text{konstant}.$$

b) Anfangs- und Endzustand des Argons

Aus der angegebenen Expansion des Argons folgt

$$V_{A2} = 8 V_{A1}.$$

Mit Teil a) erhält man

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

Damit gilt

$$T_{A2} = \frac{1}{4} T_{A1}.$$

Die Masse des Sauerstoffs bleibt bis zum Öffnen des Ventils unverändert. Die Verdopplung seiner Dichte bedeutet daher

$$V_{B2} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

In beiden Gleichgewichtszuständen zu Beginn und am Ende hat der Sauerstoff die Temperatur T_0 des Thermostaten. Seine ideale Gasgleichung liefert daher

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2 p_0.$$

Im mechanischen Gleichgewicht des Endzustands gleichen sich die Kräfte auf die verbundene Kolbenanordnung aus. Die durch den Atmosphärendruck verursachten Kräfte heben sich wegen der gleichen Kolbenflächen auf, sodass

$$p_{A2} = p_{B2} = 2 p_0.$$

Die Adiabatenbeziehung für Argon liefert nun

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

Zur Bestimmung der Temperaturen betrachten wir beide Gase gemeinsam. Gleiche Kolbenverschiebungen und gleiche Querschnittsflächen bedeuten

$$dV_A = -dV_B.$$

Das Gesamtvolumen der Gase bleibt somit konstant, und die insgesamt gegen die Atmosphäre verrichtete Arbeit ist null. Die über die Stange übertragene Arbeit ist innerhalb des Gesamtsystems intern. Da die Kolben sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand ruhen, ergibt die Gesamtenergieerhaltung

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

Der Sauerstoff hat dieselbe Anfangs- und Endtemperatur, sodass für ein ideales Gas gilt

$$\Delta U_B = 0.$$

Daher ist

$$Q' = \frac{3}{2} n_A R (T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8} n_A R T_{A1}.$$

Mit $Q' = 7.479 \times 10^6 \text{ J}$ erhält man

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

und

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

Schließlich gilt

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

und

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

Auf drei signifikante Stellen gerundet ergibt sich

$$\boxed{(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})}$$

und

$$\boxed{(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K})}.$$

c) Enddruck nach dem Öffnen des Ventils

Aus der Geometrie der Kolbenanordnung folgt

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

Mit $V_{A2} = 8V_{A1}$ und $V_{B2} = V_{B1}/2$ erhält man

$$7V_{A1} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

Somit gilt

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

und das konstante Gesamtvolumen beträgt

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

Nach dem Öffnen des Ventils vermischen sich die Gase und erreichen schließlich die Temperatur T_0 des Thermostaten. Obwohl Zylinder A isoliert ist, kann sein Gas durch die offene Verbindung mit Zylinder B Energie austauschen.

Für die erhaltene Stoffmenge des Sauerstoffs gilt

$$n_B RT_0 = p_0 V_{B1} = 14p_0 V_{A1}.$$

Für Argon gilt

$$n_A RT_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2p_0 V_{A1}.$$

Die Anwendung der idealen Gasgleichung auf das Gemisch im Endzustand ergibt

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B)RT_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14)p_0 V_{A1}}{15V_{A1}}.$$

Daher gilt

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 = 2.2133p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Aufsteigen einer dielektrischen Flüssigkeit zwischen den Platten eines geladenen Kondensators

Ein Plattenkondensator mit rechteckigen Platten ist senkrecht befestigt, wobei sein unterer Teil mit einer dielektrischen Flüssigkeit in Berührung steht (Abb. 3.1).

Bestimmen Sie die Höhe h der Flüssigkeit zwischen den Platten und erklären Sie das Phänomen. Kapillareffekte werden vernachlässigt.

Es wird angenommen, dass der Abstand zwischen den Platten wesentlich kleiner als die linearen Abmessungen der Platten ist.

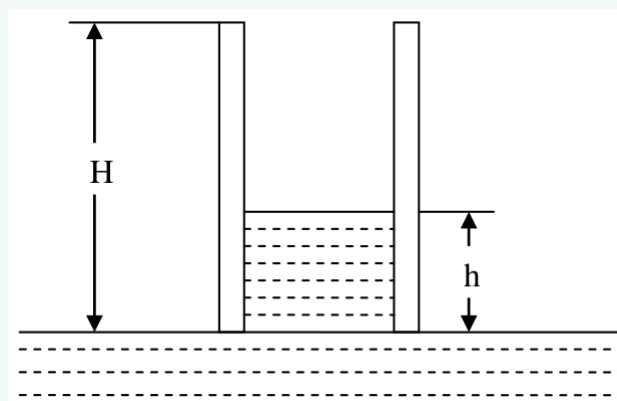


Abb. 3.1

Gegeben sind: die anfängliche elektrische Feldstärke E des geladenen Kondensators, die Dichte ρ , die relative Permittivität ε_r der Flüssigkeit sowie die Höhe H der Kondensatorplatten. Diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 3 — Höhe:** Unter der Annahme, dass der geladene Kondensator isoliert ist, setzen wir $a = \varepsilon_r - 1 > 0$. Sei h_* die eindeutige nichtnegative Lösung von

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

Die Gleichgewichtshöhe ist $h = h_*$, wenn $h_* < H$. Die Flüssigkeit füllt den Spalt bis zum oberen Rand, in der idealisierten Näherung also $h = H$, wenn

$$E \geq E_c = \varepsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}}.$$

- **Aufgabe 3 — Erklärung und Diskussion:** Die Polarisation erzeugt eine nach oben gerichtete elektrische Kraft. Im Gleichgewicht bei teilweiser Füllung gleicht der zugehörige Druck den hydrostatischen Druck aus:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\varepsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

Dieses Gleichgewicht ist eindeutig und stabil. Für $E = 0$ oder $\varepsilon_r = 1$ steigt die Flüssigkeit nicht an.

- **Aufgabe 3 — Alternative bei konstanter Spannung:** Hält stattdessen eine Spannungsquelle die anfängliche Spannung aufrecht, lautet das Ergebnis

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2\rho g} \right\}.$$

Lösung

Aufgabe 3. Der Verweis auf die *anfängliche* Feldstärke legt zusammen mit dem Fehlen einer angegebenen Spannungsquelle einen isolierten Kondensator nahe, dessen freie Ladung konstant bleibt. Wir lösen zunächst diesen Fall.

Die Plattenbreite sei b , der Plattenabstand d , und die Flüssigkeitsoberfläche außerhalb des Kondensators liege bei $z = 0$. Wir betrachten das Reservoir als hinreichend groß, sodass dieser Flüssigkeitsspiegel unverändert bleibt. Die Flüssigkeit ist ein lineares, homogenes, inkompressibles Dielektrikum; Luft hat die Permittivität ε_0 . Randfeldkorrekturen der Kapazität werden vernachlässigt, da d wesentlich kleiner als die Plattenabmessungen ist.

Kapazität und Feld während des Aufsteigens. Wenn die Flüssigkeit bis zur Höhe $h < H$ angestiegen ist, bilden der mit Flüssigkeit und der mit Luft gefüllte Bereich zwei parallel geschaltete Kondensatoren. Somit gilt

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b(H-h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

wobei

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

Anfangs gilt $V_0 = Ed$, sodass für die erhaltene Ladung gilt:

$$Q = C_0 E d.$$

Folglich ist die Feldstärke nach dem Aufsteigen

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \boxed{\frac{E}{1 + ah/H}}.$$

Die Feldstärke nimmt daher ab, wenn Flüssigkeit in den isolierten Kondensator eindringt.

Gleichgewichtshöhe. Bei konstanter Ladung beträgt die elektrische Energie

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

Die zum Anheben der Flüssigkeit aus dem Reservoir in den Spalt erforderliche potenzielle Energie im Schwerfeld ist

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

Ein statisches Gleichgewicht minimiert die Gesamtenergie. Daher gilt

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = b d \left[\rho g h - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

Somit folgt

$$\boxed{\rho g h = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

oder gleichwertig

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2 \rho g}}.$$

Diese kubische Gleichung bestimmt die Gleichgewichtshöhe aus den gegebenen Größen. Sowohl b als auch d kürzen sich heraus, was erklärt, weshalb ihre Werte nicht benötigt werden.

Physikalische Erklärung. Das Einbringen eines Dielektrikums erhöht die Kapazität und verringert bei konstanter Ladung die elektrische Energie. Die entsprechende nach oben gerichtete Kraft ist

$$F_e = - \left. \frac{dU_e}{dh} \right|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

Der zugehörige elektrische Druck beträgt daher

$$p_e = \frac{F_e}{bd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

Die Flüssigkeit steigt so lange an, bis dieser Druck den hydrostatischen Druck $\rho g h$ der angehobenen Flüssigkeitssäule ausgleicht.

Das Gleichsetzen der anfänglichen und der abschließenden Gesamtenergie würde im Allgemeinen einen möglichen Umkehrpunkt während der Bewegung beschreiben, nicht das statische Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsbedingung ist das oben verwendete Verschwinden der Energieableitung.

Diskussion.

Für $a > 0$ definieren wir

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

Für $h \geq 0$ gilt

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

Somit gibt es genau eine nichtnegative Lösung. Sie ist stabil: Eine Zunahme von h erhöht die nach unten gerichtete Schwerkraft und verringert zugleich die nach oben gerichtete elektrische Kraft.

Explizit gilt

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = bd \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

Die Herleitung gilt für eine Oberfläche, die zwischen den unteren und oberen Plattenrändern liegt. Setzt man $h = H$ in die Gleichgewichtsbedingung ein, erhält man

$$H \varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E_c^2}{2 \rho g},$$

woraus sich der oben angegebene Schwellenwert E_c ergibt. Für $E > E_c$ gibt es kein Gleichgewicht bei teilweiser Füllung unterhalb des oberen Randes: Der Spalt wird vollständig gefüllt. Zur Bestimmung der genauen Form der Oberfläche nahe den oberen Kanten oder oberhalb davon müssen Randfelder berücksichtigt werden, die durch die Näherung paralleler Platten nicht bestimmt werden.

Wenn sich die Kapazität nur geringfügig ändert,

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

bleibt die Feldstärke näherungsweise gleich ihrem Anfangswert, und es gilt

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2 \rho g}.$$

Insbesondere geht die Steighöhe für $E \rightarrow 0$ oder $\varepsilon_r \rightarrow 1$ gegen null.

Bei einem isolierten Kondensator führt eine Erhöhung der Permittivität nicht immer zu einer größeren Steighöhe, da sie zugleich die Feldstärke verringert. Bei festem E, H gilt im Grenzfall großer Permittivität

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2 \rho g (\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

Für eine genauere quantitative Betrachtung setzen wir

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

Bevor die geometrische Beschränkung $h \leq H$ berücksichtigt wird, beträgt das Maximum bezüglich der Permittivität daher

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

und wird bei $x = 1$, also $a = 2/\sqrt{B}$, erreicht. Übersteigt dieses Maximum H , ist für einen Bereich von Permittivitäten eine vollständige Füllung möglich.

Bleibt schließlich eine Spannungsquelle angeschlossen, so bleiben $V = Ed$ und $\mathcal{E} = E$ konstant. Unter Berücksichtigung der Quelle beträgt die effektive elektrische potenzielle Energie $-CV^2/2$. Im Gleichgewicht gilt dann

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2,$$

woraus das unter Antworten angegebene Ergebnis für konstante Spannung folgt.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 4: Plankonvexe Linse zwischen zwei Medien; Billetsche geteilte Linse

Eine dünne plankonvexe Linse mit dem Durchmesser $2r$, dem Krümmungsradius R und dem Brechungsindex n_o ist so angeordnet, dass sich auf ihrer linken Seite Luft ($n_1 = 1$) und auf ihrer rechten Seite ein durchsichtiges Medium mit dem Brechungsindex $n_2 \neq 1$ befindet. Die konvexe Fläche der Linse ist der Luft zugewandt. In der Luft befindet sich im Abstand s_1 von der Linse, gemessen entlang der optischen Hauptachse, eine punktförmige Quelle monochromatischen Lichts.

a) Zeigen Sie mithilfe der gaußschen Näherung, dass zwischen der durch den Abstand s_2 von der Linse angegebenen Bildlage und der Lage der Lichtquelle die folgende Beziehung besteht:

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

wobei f_1 und f_2 die Brennweiten der Linse in Luft beziehungsweise im Medium mit dem Brechungsindex n_2 sind.

Hinweis: Alle Brechungsindizes sind absolute Brechungsindizes.

b) Die Linse wird senkrecht zu ihrer ebenen Fläche in zwei gleiche Teile geschnitten. Diese Teile werden um einen Abstand $\delta \ll r$ auseinandergerückt (Billetsche Linse). Auf der Symmetrieachse des so entstandenen Systems wird im Abstand s_1 ($s_1 > f_1$) eine punktförmige Lichtquelle angebracht (Abb. 4.1). Rechts von der Linse befindet sich im Abstand d ein Schirm E. Der Schirm ist parallel zur ebenen Fläche der Linse. Auf diesem Schirm erscheinen N Interferenzstreifen, wenn sich rechts von der Linse Luft befindet.

Bestimmen Sie N in Abhängigkeit von der Wellenlänge.

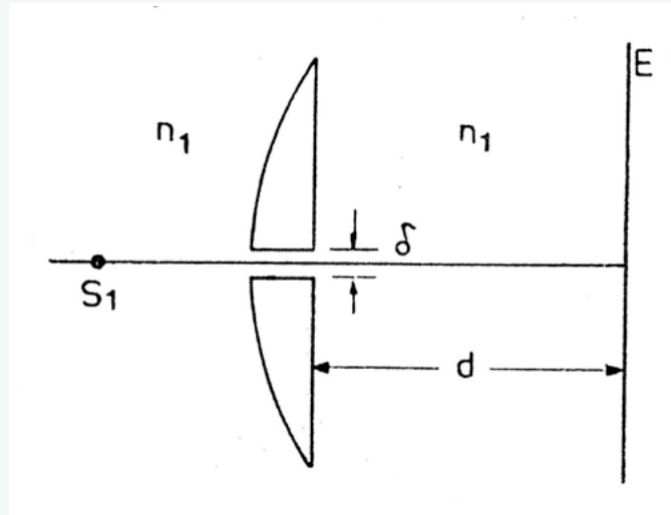


Abb. 4.1

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- a) Die Brennweiten und die Abbildungsgleichung lauten

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}, \quad \frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

- b) Setzen Sie

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f}.$$

Für die übliche Schirmposition, bei der die äußeren Aperturränder den Interferenzbereich nicht begrenzen, gilt

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2 (s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - f s_1]}.$$

Dies setzt voraus, dass

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Dabei ist N die übliche Anzahl, die sich durch Division der Überlappungsbreite durch den Streifenabstand ergibt.

Unter Berücksichtigung der Beschneidung durch die endliche Apertur lautet die entsprechende Anzahl

$$\overline{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max\left\{0, \min\left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0\right]\right\}, & d > v. \end{cases}$$

Bei positiver Überlappungsbreite beträgt die ganzzahlige Anzahl heller Maxima einschließlich der Maxima am Rand

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\overline{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

Lösung

a) Brechung an den beiden Flächen

Wir verwenden die Dünnlinsen- und die gaußsche Näherung: Der Abstand zwischen den beiden Flächen wird vernachlässigt, und es werden nur Terme erster Ordnung in den Strahlhöhen und Winkeln berücksichtigt. Die Ausbreitungsrichtung sei von links nach rechts, wobei s_1 für die reelle Quelle und s_2 für ein reelles Bild positiv sind.

Betrachten wir einen Strahl, der in der Höhe y auftrifft. Sein Winkel zur optischen Achse beträgt

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

Da der Krümmungsmittelpunkt rechts von der konvexen Fläche liegt, hat die Flächennormale den Winkel

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

Sei θ_o der Strahlwinkel innerhalb der Linse. Das snelliussche Brechungsgesetz ergibt in der Kleinwinkelnäherung

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

also

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

An der ebenen Fläche, deren Normale parallel zur optischen Achse ist, gilt

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

Für einen Strahl, der das Bild auf der Achse erreicht, gilt

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

Durch Kombination dieser Gleichungen und Kürzen von y erhält man

$$\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}.$$

Die vordere Brennweite ist der Abstand der Quelle, bei dem die austretenden Strahlen parallel sind. Für $s_2 \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Die hintere Brennweite ist die Bildweite bei parallel einfallenden Strahlen. Für $s_1 \rightarrow \infty$ ergibt sich

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

Division der Abbildungsgleichung durch $(n_o - 1)/R$ liefert daher

$$\boxed{\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1}.$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für virtuelle Bilder, wenn s_2 als vorzeichenbehafteter Abstand behandelt wird.

b) Von den beiden Hälften erzeugte Bilder

Auf beiden Seiten der Linse befindet sich nun Luft, sodass die Brennweite gegeben ist durch

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

Jede Hälfte erzeugt ein Bild im Längsabstand v , wobei

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f} > 0.$$

Wir wählen die Querkoordinate y senkrecht zum Schnitt. Die gesamte in der Abbildung gezeigte Spaltbreite ist δ , sodass für die Lage der Achsen der beiden Hälften gilt:

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

Bezogen auf die Achse einer Linsenhälfte beträgt die Höhe der Quelle $-c_{\pm}$. Der laterale Abbildungsmaßstab ist $-v/s_1$, woraus sich die Bildpositionen ergeben:

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

Folglich beträgt der Abstand zwischen den beiden Bildern

$$\boxed{b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}}.$$

Diese Bilder wirken als kohärente Sekundärquellen. Aufgrund der Spiegelsymmetrie sind ihre Phasen gleich, sodass der zentrale Streifen hell ist.

Streifenabstand

Für einen Schirm hinter der Bildebene setzen wir

$$L = d - v > 0.$$

An der Schirmkoordinate y beträgt der paraxiale Gangunterschied der von den beiden Bildern ausgehenden Strahlen

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

Die hellen Streifen erfüllen somit

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

und ihr Abstand beträgt

$$\boxed{\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d-v)}{\delta v}}.$$

In der paraxialen Näherung sind sie gerade Linien parallel zum Schnitt.

Breite der überlappenden Strahlenbündel

Wir verwenden geometrische Strahlenbündelbegrenzungen und vernachlässigen die Beugung an den Aperturrändern.

Der Strahl durch das optische Zentrum jeder Hälfte wird nicht abgelenkt. Diese beiden Strahlen erreichen den Schirm bei

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Sofern die äußeren Aperturränder den Überlappungsbereich nicht beschneiden, beträgt dessen Breite daher

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Division dieser Breite durch den Streifenabstand ergibt

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Einsetzen von $v = fs_1/(s_1 - f)$ liefert

$$\boxed{N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}}.$$

Bei fester Geometrie und festem Brechungsindex ist dies proportional zu $1/\lambda$.

Bedingungen bei endlicher Apertur

Die Aufgabenstellung legt die Lage des Schirms relativ zur Bildebene nicht fest, sodass auch die Bedingungen für eine Überlappung geprüft werden müssen.

Ein Strahl, der die obere Hälfte in der Höhe y_0 durchläuft, geht durch deren Bild in der Höhe y_+ . Seine Höhe auf dem Schirm beträgt

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v} \right) y_0 + \frac{d}{v} y_+.$$

Die obere Hälfte erstreckt sich über

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

Für $d > v$ definieren wir

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

Im zentralen Schnitt durch den Schirm erstreckt sich das obere Strahlenbündel über

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

und das untere Strahlenbündel über

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

Ihr Überlappungsbereich ist symmetrisch zu $y = 0$ und hat die Breite

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

Der übliche Ausdruck N_0 gilt somit, wenn

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

Im Fall einer teilweisen Überlappung gilt

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

Damit ist der unter Antworten angegebene allgemeine Ausdruck für $\overline{N} = W/\beta$ bewiesen. Für $d \leq v$ bleiben die beiden geometrischen Strahlenbündel auf entgegengesetzten Seiten der Symmetrieachse und überlappen sich nicht.

Schließlich treten für $W > 0$ helle Maxima bei den ganzzahligen Werten auf, die folgende Bedingung erfüllen:

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

Unter Einbeziehung der Maxima genau auf dem Rand ergibt sich

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.