

المسألة 1: ثلاث أسطوانات على مستوى مائل

تستقر في البداية على مستوى مائل ثلاث أسطوانات لها الكتلة نفسها والطول نفسه ونصف القطر الخارجي نفسه. معامل الاحتكاك الانزلاقي على المستوى المائل، μ ، معلوم وله القيمة نفسها للأسطوانات جميعها. الأسطوانة الأولى فارغة (أنبوب)، والثانية مصمتة ومتجانسة، والثالثة ذات تجويف مائل تماماً لتجفيف الأولى، لكنه مغلق بغطاءين كتلتها مهملتان ومملوء بسائل كثافته مساوية لكثافة جدران الأسطوانة. يُعد الاحتكاك بين السائل وجدار الأسطوانة مهملًا. كثافة مادة الأسطوانة الأولى تساوي n أمثال كثافة مادة الأسطوانة الثانية أو الثالثة.

أوجد:

- التسارع الخطي للأسطوانات في حالة عدم الانزلاق. قارن بين التسارعات جميعها.
- الشرط على زاوية ميل المستوى α لكي لا تنزلق أي من الأسطوانات.
- النسب المتبادلة بين التسارعات الزاوية في حالة تدرج الأسطوانات الثلاث جميعها مع الانزلاق. قارن بين هذه التسارعات.
- قوة التفاعل بين السائل وجدران الأسطوانة في حالة انزلاق هذه الأسطوانة، علمًا بأن كتلة السائل هي m_l .

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليكن R نصف القطر الخارجي المشترك، β_i التسارع الزاوي للجزء الصلب من الأسطوانة i . وليكن اتجاه $\hat{e}_{\parallel}$ نحو أسفل المستوى المائل، واتجاه $\hat{e}_{\perp}$ عمودياً على المستوى وبعبداً عنه. تفترض المقارنات الآتية وجود تجاوزات فعلية، أي $n > 1$ ، وأن $0 < \alpha < \pi/2$.

• (a) التسارعات نحو أسفل المستوى المائل هي

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1}g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3}g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2+2n-1}g \sin \alpha$$

وتحقق

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

• (b) إذا كان μ المعطى يمثل أيضاً معامل الاحتكاك السكوني الحدي، فإن

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}.$$

تحدّد الأسطوانة 1 الشرط الحدي. وإذا كان μ يدلّ على الاحتكاك الحركي حصراً، فلا بدّ أيضاً من معرفة معاملات الاحتكاك السكوني لتحديد شرط دقيق لعدم الانزلاق.

• (c) عندما يكون الاحتكاك الانزلاقي غير صفري،

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n - 1) : n^2, \quad \beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

وبصورة مكافئة، تحقق مقلوبات التسارعات

$$\frac{1}{\beta_1} : \frac{1}{\beta_2} : \frac{1}{\beta_3} = \frac{1}{n} : \frac{1}{2n - 1} : \frac{1}{n^2}.$$

• (d) محصلة القوة التي تؤثر بها الجدران في السائل هي

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel}).$$

ومن ثم فإن مقدار قوة التفاعل هو

$$F = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

تصنع القوة المؤثرة في السائل زاوية $\arctan \mu$ مع العمود المتجه بعيداً عن المستوى، نحو أعلى المستوى المائل. والقوة المؤثرة في الجدران مساوية لها في المقدار ومعاكسة لها في الاتجاه.

الحل

لتكن الكتلة الكلية المشتركة M ، والطول المشترك L ، ونصف قطر تجويف الأسطوانتين 1 و 3 هو r . نرمز إلى كثافة الأسطوانة 2 وجدران الأسطوانة 3 وسائلها بالرمز ρ . كثافة الأسطوانة 1 هي $n\rho$.

يعطي تساوي الكتل

$$M = \rho \pi R^2 L = n \rho \pi (R^2 - r^2) L.$$

إذن،

$$\frac{r^2}{R^2} = \frac{n - 1}{n}.$$

وعليه، فإن كتلة غلاف الأسطوانة الثالثة وكتلة سائلها هما

$$M_{\text{shell},3} = \frac{M}{n}, \quad m_l = M \frac{n - 1}{n}.$$

نتعامل مع الأسطوانات بوصفها أجساماً صلبة، ونهمل مقاومة التدرج، ونمثل السائل المحصور تماماً بنموذج سائل غير قابل للانضغاط وعديم اللزوجة. لا يفرض دوران الجدار الدائري حركة مماسية على هذا السائل. ولا تولّد قوى الضغط عزماً حول محور الأسطوانة، لذا يتحرك السائل، الذي لا يدور في البداية، حركة انتقالية مع الأسطوانة من دون أن يدور حول نفسه.

وهكذا تسهم الكتلة M بأكملها في الحركة الانتقالية، لكن الغلاف وحده يسهم في عزم القصور الذاتي الدوراني للأسطوانة 3. وباستخدام عزم القصور الذاتي المحوري $\frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$ لأسطوانة حلقيّة متجانسة،

$$I_1 = \frac{1}{2} M (R^2 + r^2) = M R^2 \frac{2n - 1}{2n},$$

$$I_2 = \frac{1}{2} M R^2,$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \frac{M}{n} (R^2 + r^2) = M R^2 \frac{2n - 1}{2n^2}.$$

يشير I_3 هنا إلى عزم القصور الذاتي للغلاف الدوّار.

نعرف عزوم القصور الذاتي اللابعدية

$$k_i = \frac{I_i}{MR^2}, \quad k_1 = \frac{2n-1}{2n}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{2n-1}{2n^2}.$$

(a) التسارعات الخطية من دون انزلاق

لتكن f_i قوة الاحتكاك السكوني، المتجهة نحو أعلى المستوى المائل. يعطي قانون نيوتن الثاني على امتداد المستوى ومعادلة الحركة الدورانية حول محور الأسطوانة

$$Ma_i = Mg \sin \alpha - f_i, \quad I_i \beta_i = f_i R.$$

في حالة التدحرج من دون انزلاق،

$$a_i = R \beta_i.$$

إذن،

$$f_i = \frac{I_i}{R^2} a_i = M k_i a_i,$$

ومن ثمّ

$$a_i = \frac{g \sin \alpha}{1 + k_i}.$$

بالتعويض عن عزوم القصور الذاتي الثلاثة،

$$a_1 = \frac{2n}{4n-1} g \sin \alpha, \quad a_2 = \frac{2}{3} g \sin \alpha, \quad a_3 = \frac{2n^2}{2n^2 + 2n - 1} g \sin \alpha.$$

عندما يكون $n > 1$

$$k_1 - k_2 = \frac{n-1}{2n} > 0, \quad k_2 - k_3 = \frac{(n-1)^2}{2n^2} > 0.$$

وبما أن a_i يتناقص بازدياد k_i ، فإن

$$a_1 < a_2 < a_3 < g \sin \alpha.$$

تكتسب الأسطوانة المملوءة بالسائل أكبر تسارع، لأن سائلها يضيف كتلة تتحرك حركة انتقالية من دون أن يضيف عزم قصور ذاتي دورانياً.

(b) شرط تدحرج الأسطوانات جميعها من دون انزلاق

لا يوجد تسارع عمودي على المستوى، لذا تكون قوة رد الفعل العمودية على كل أسطوانة

$$N = Mg \cos \alpha.$$

قوة الاحتكاك السكوني اللازمة للتدحرج هي

$$f_i = Mg \sin \alpha \frac{k_i}{1 + k_i},$$

وهذا يعطي

$$\frac{f_i}{N} = \frac{k_i}{1 + k_i} \tan \alpha.$$

للتمييز صراحةً بين الاحتكاك السكوني والاحتكاك الانزلاقي، ليكن $\mu_{s,i}$ معامل الاحتكاك السكوني الحدي للأسطوانة i . يمكن للأسطوانات الثلاث جميعها أن تتدحرج من دون انزلاق إذا وفقط إذا تحقق

$$\tan \alpha \leq \min \left\{ \mu_{s,1} \frac{4n-1}{2n-1}, 3\mu_{s,2}, \mu_{s,3} \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1} \right\}.$$

في التقريب المثالي المعتاد الذي يستخدم معاملاً واحداً، $\mu_{s,1} = \mu_{s,2} = \mu_{s,3} = \mu$. وبما أن $k_1 > k_2 > k_3$ ، فإن الأسطوانة 1 تتطلب أكبر قوة احتكاك نسبةً إلى قوة رد الفعل العمودية عليها، ولذلك فهي التي تحدّد الحد:

$$\tan \alpha \leq \mu \frac{4n-1}{2n-1}, \quad \text{أو} \quad \alpha \leq \arctan \left(\mu \frac{4n-1}{2n-1} \right).$$

توافق المساواة بلوغ الاحتكاك السكوني للأسطوانة 1 قيمته الحدية.

(c) نسب التسارعات الزاوية عندما تنزلق الأسطوانات الثلاث جميعها

في الحالة المفترضة، تنزلق الأسطوانات نحو أسفل المستوى بالنسبة إليه. يؤثر الاحتكاك الحركي نحو أعلى المستوى، وله المقدار نفسه لكل أسطوانة:

$$f = \mu Mg \cos \alpha.$$

لذلك تتساوى تسارعاتها الانتقالية:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

تُستنتج تسارعاتها الزاوية من

$$I_i \beta_i = f R,$$

من دون فرض علاقة عدم الانزلاق $a = R\beta$. وبناءً على ذلك،

$$\beta_1 = \frac{2n}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_2 = 2 \frac{\mu g \cos \alpha}{R}, \quad \beta_3 = \frac{2n^2}{2n-1} \frac{\mu g \cos \alpha}{R}.$$

بحذف العامل المشترك نحصل على

$$\beta_1 : \beta_2 : \beta_3 = n : (2n-1) : n^2.$$

النسب المتبادلة هي

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2n-1}{n}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_2} = \frac{n^2}{2n-1}, \quad \frac{\beta_3}{\beta_1} = n.$$

عندما يكون $n > 1$ ،

$$2n-1 > n, \quad n^2 - (2n-1) = (n-1)^2 > 0,$$

ومن ثم

$$\beta_1 < \beta_2 < \beta_3.$$

للتحقق من الاتساق، يتطلب الانزلاق نحو أسفل المستوى انطلاقاً من السكون أن يكون $a_{sl} - R\beta_i > 0$. في نموذج المعامل الواحد، تحقق الأسطوانات الثلاث جميعها هذا الشرط عندما

$$\tan \alpha > \mu \frac{2n^2 + 2n - 1}{2n - 1}.$$

تكون الأسطوانة 3 آخر أسطوانة تبدأ بالانزلاق مع ازدياد زاوية الميل.

(d) قوة التفاعل بين السائل والجدران

يتسارع مركز كتلة السائل نحو أسفل المستوى مع الأسطوانة المنزلقة:

$$a_{sl} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha).$$

لتكن $F_{\perp}$ و $F_{\parallel}$ مركبتي محصلة القوة التي تؤثر بها الجدران في السائل، مع اعتبار الاتجاه الموجب نحو أسفل المستوى، وعمودياً على المستوى وبعيداً عنه، على الترتيب. بتطبيق قانون نيوتن الثاني على السائل وحده،

$$F_{\parallel} + m_l g \sin \alpha = m_l a_{sl},$$

$$F_{\perp} - m_l g \cos \alpha = 0.$$

ومن ثم

$$F_{\parallel} = -\mu m_l g \cos \alpha, \quad F_{\perp} = m_l g \cos \alpha.$$

تنشأ هاتان المركبتان من محصلة قوة الضغط؛ ولا يستلزم وجود مركبة نحو أعلى المستوى احتكاكاً لزجاً بين السائل والجدار. لذلك،

$$\mathbf{F}_{\text{walls} \rightarrow l} = m_l g \cos \alpha (\hat{\mathbf{e}}_{\perp} - \mu \hat{\mathbf{e}}_{\parallel})$$

9

$$F = \sqrt{F_{\parallel}^2 + F_{\perp}^2} = m_l g \cos \alpha \sqrt{1 + \mu^2}.$$

زاوية ميلها عن العمود المتجه بعيداً عن المستوى، نحو أعلى المستوى، هي

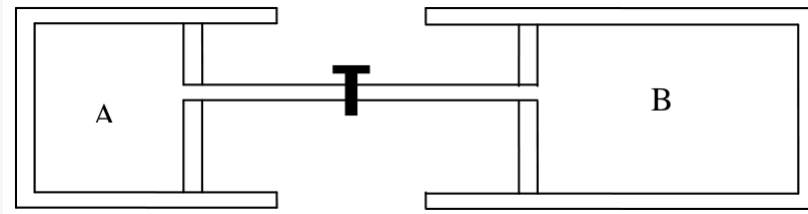
$$\theta = \arctan \mu.$$

وفقاً لقانون نيوتن الثالث، يؤثر السائل في الجدران بالقوة المعاكسة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: الأرجون والأكسجين في أسطوانتين نواتي مكبسين متصلين

تحتوي أسطوانتان A و B متساويتان في القطر على مكبسين كتلتها مهمة، يصل بينهما قضيب صلب. ويمكن للمكبسين التحرك بحرية. والقضيب أنبوب قصير مزود بصمام. يكون الصمام مغلقاً في البداية (الشكل 2.1).



الشكل 2.1

الأسطوانة A ومكبسها معزولان حرارياً، أما الأسطوانة B فهي على تماس حراري مع منظم حرارة درجة حرارته $\theta = 27^\circ\text{C}$.

في البداية، يكون مكبس الأسطوانة A مثبتاً، وتحتوي الأسطوانة على كتلة $m = 32\text{ kg}$ من الأرجون عند ضغط أعلى من الضغط الجوي. وتحتوي الأسطوانة B على كتلة من الأكسجين عند الضغط الجوي النظامي.

عند تحرير مكبس الأسطوانة A، يتحرك ببطء كافٍ لتكون العملية شبه ساكنة، وعند الاتزان يصبح حجم الغاز ثمانية أمثال حجمه الابتدائي، وتتضاعف كثافة الأكسجين في الأسطوانة B. علماً بأن منظم الحرارة قد تلقى كمية الحرارة $Q' = 747,9 \cdot 10^4\text{ J}$ ، حدّد ما يأتي:

(a) أثبت، بالاستناد إلى النظرية الحركية للغازات ودراسة التصادمات المرنة للجزيئات مع المكبس، أن المعادلة الحرارية للعملية التي تجري في الأسطوانة A هي ثابت $TV^{2/3}$.

(b) احسب متغيرات حالة الأرجون p و V و T في الحالتين الابتدائية والنهائية.

(c) عند فتح الصمام الذي يفصل بين الأسطوانتين، احسب الضغط النهائي لمزيج الغازين.

الكتلة المولارية للأرجون هي $\mu = 40\text{ kg/kmol}$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

فيما يأتي النتائج الصورية المستخلصة من العلاقة الأدبياتية المطلوبة، والاتزان الميكانيكي النهائي، وانحفاظ الطاقة الكلية. تتطوي صياغة شرط العملية شبه الساكنة على إشكال في الاتساق الفيزيائي: فعند تحرير المكبس يكون ضغط الأرجون $64p_0$ في حين أن ضغط الأكسجين p_0 فقط، ولذلك لا يمكن لمجموعة المكبسين ذات الكتلة المهمل أن تتحرك حركة شبه ساكنة.

- (a) ثابت $TV^{2/3}$ ، أو بصورة مكافئة ثابت $pV^{5/3}$.
- (b) حالتا الأرجون، قبل فتح الصمام، هما:

الحالة	الضغط p	الحجم V	درجة الحرارة T
الابتدائية	$64p_0 \simeq 6.48 \times 10^6 \text{ Pa}$	1.03 m^3	$1.00 \times 10^3 \text{ K}$
النهائية	$2p_0 \simeq 2.03 \times 10^5 \text{ Pa}$	8.20 m^3	250 K

- (c) بعد فتح الصمام والوصول إلى الاتزان الحراري،

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

هنا يمثل p_0 الضغط الجوي النظامي.

الحل

نعتبر كلا الغازين مثاليًا، ونهمل حجم أنبوب التوصيل القصير. نستخدم

$$p_0 = 1.01325 \times 10^5 \text{ Pa}, \quad T_0 \simeq 300 \text{ K}, \quad R = 8.31 \times 10^3 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

كمية مادة الأرجون هي

$$n_A = \frac{m}{\mu} = \frac{32}{40} = 0.800 \text{ kmol}.$$

يشير الدليلان السفليان 1 و 2 إلى الحالة الابتدائية وحالة الاتزان التي يتم الوصول إليها مع بقاء الصمام مغلقًا.

(a) الاشتقاق من التصادمات الجزيئية

لتكن مساحة مكبس الأرجون S ، ولنفترض أنه يتحرك إلى الخارج بسرعة u ، صغيرة مقارنة بالسرعات الحرارية للجزيئات. ندرس ذرة أرجون كتلتها m_0 تقترب منه، ومركبة سرعتها العمودية على المكبس هي v_x .

في الإطار المرجعي الذي يكون فيه المكبس ساكنًا لحظيًا، يعكس التصادم المرن اتجاه مركبة السرعة العمودية. ومن ثم، في الإطار المرجعي للمختبر،

$$v'_x = 2u - v_x.$$

تبقى مركبات السرعة الأخرى دون تغيير. ولذلك يكون تغير طاقة الذرة

$$\Delta \varepsilon = \frac{m_0}{2} [(2u - v_x)^2 - v_x^2] = -2m_0 u (v_x - u).$$

الدفع المنتقل إلى المكبس هو

$$I = 2m_0 (v_x - u),$$

ومن ثم

$$\Delta \varepsilon = -uI.$$

بجمع مساهمات التصادمات الجزيئية، يكون الدفع المنتقل في وحدة الزمن مساويًا للقوة $p_A S$. وبناءً عليه،

$$\frac{dU_A}{dt} = -p_A S u = -p_A \frac{dV_A}{dt},$$

أو

$$dU_A = -p_A dV_A.$$

بالنسبة إلى غاز مثالي أحادي الذرة في حالة اتزان، تعطي النظرية الحركية

$$p_A = \frac{Nm_0}{V_A} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm_0}{3V_A} \langle v^2 \rangle, \quad U_A = \frac{1}{2} Nm_0 \langle v^2 \rangle.$$

وعليه

$$p_A V_A = \frac{2}{3} U_A, \quad U_A = \frac{3}{2} N k_B T_A.$$

يتيح افتراض الحركة البطيئة للتصادمات بين الجزيئات أن تحافظ على توزيع اتزاني للسرعات متساوي الخواص في جميع الاتجاهات.

بالتعويض في معادلة الطاقة نحصل على

$$\frac{3}{2} N k_B dT_A = -\frac{N k_B T_A}{V_A} dV_A.$$

ولذلك

$$\frac{dT_A}{T_A} = -\frac{2}{3} \frac{dV_A}{V_A}.$$

بالتكامل،

$$T_A V_A^{2/3} = \text{ثابت}.$$

وبالجمع بين هذه العلاقة و $p_A V_A = n_A R T_A$ نحصل أيضاً على

$$p_A V_A^{5/3} = \text{ثابت}.$$

(b) حالات الأرجون الابتدائية والنهائية

يعطي تمدد الأرجون المحدد في المعطيات

$$V_{A2} = 8V_{A1}.$$

باستخدام الجزء (a)،

$$\frac{T_{A2}}{T_{A1}} = \left(\frac{V_{A1}}{V_{A2}} \right)^{2/3} = 8^{-2/3} = \frac{1}{4}.$$

ومن ثم

$$T_{A2} = \frac{1}{4} T_{A1}.$$

تبقى كتلة الأكسجين دون تغيير قبل فتح الصمام. ولذلك فإن تضاعف كثافته يعني

$$V_{B2} = \frac{1}{2} V_{B1}.$$

في كلتا حالتَي الاتزان الابتدائية والنهائية، تكون درجة حرارة الأكسجين مساوية لدرجة حرارة منظم الحرارة T_0 . وعندئذ تعطي معادلة الغاز المثالي له

$$p_{B2} = p_{B1} \frac{V_{B1}}{V_{B2}} = 2p_0.$$

عند الاتزان الميكانيكي النهائي، تتوازن القوى المؤثرة في مجموعة المكسبين المتصلين. وتتلاشى محصلة قوى الضغط الجوي لأن مساحتي المكسبين متساويتان، فيبقى

$$p_{A2} = p_{B2} = 2p_0.$$

تعطي العلاقة الأديباتية للأرجون الآن

$$p_{A1} = p_{A2} \left(\frac{V_{A2}}{V_{A1}} \right)^{5/3} = 2p_0 8^{5/3} = \boxed{64p_0}.$$

لتحديد درجتي الحرارة، ندرس الغازين معًا. يقتضي تساوي إزاحتي المكسبين وتساوي مساحتي المقطعين العرضيين أن

$$dV_A = -dV_B.$$

ومن ثم يكون الحجم الكلي للغازين ثابتًا، ويكون الشغل الصافي المبذول ضد الضغط الجوي صفرًا. والشغل المنقول عبر القضيب داخلي بالنسبة إلى النظام المكوّن من الغازين. وبما أن المكسبين ساكنان في كلتا الحالتين الابتدائية والنهائية، فإن انحفاظ الطاقة الكلية يعطي

$$\Delta U_A + \Delta U_B = -Q'.$$

للاكسجين درجة الحرارة نفسها في الحالتين الابتدائية والنهائية، ولذلك، باعتباره غازًا مثاليًا،

$$\Delta U_B = 0.$$

وعليه

$$Q' = \frac{3}{2}n_A R(T_{A1} - T_{A2}) = \frac{9}{8}n_A R T_{A1}.$$

باستخدام $Q' = 7.479 \times 10^6 \text{ J}$

$$T_{A1} = \frac{8Q'}{9n_A R} = \frac{8(7.479 \times 10^6)}{9(0.800)(8.31 \times 10^3)} = \boxed{1000 \text{ K}},$$

و

$$\boxed{T_{A2} = 250 \text{ K}}.$$

وأخيرًا،

$$V_{A1} = \frac{n_A R T_{A1}}{p_{A1}} = \frac{(0.800)(8.31 \times 10^3)(1000)}{64(1.01325 \times 10^5)} = 1.025 \text{ m}^3,$$

و

$$V_{A2} = 8V_{A1} = 8.201 \text{ m}^3.$$

بالتقريب إلى ثلاثة أرقام معنوية،

$$\boxed{(p_{A1}, V_{A1}, T_{A1}) = (6.48 \times 10^6 \text{ Pa}, 1.03 \text{ m}^3, 1.00 \times 10^3 \text{ K})}$$

و

$$\boxed{(p_{A2}, V_{A2}, T_{A2}) = (2.03 \times 10^5 \text{ Pa}, 8.20 \text{ m}^3, 250 \text{ K})}.$$

(c) الضغط النهائي بعد فتح الصمام

تعطي هندسة المكسبين

$$V_{A2} - V_{A1} = V_{B1} - V_{B2}.$$

باستخدام $V_{B2} = V_{B1}/2$ و $V_{A2} = 8V_{A1}$

$$7V_{A1} = \frac{1}{2}V_{B1}.$$

وعليه

$$V_{B1} = 14V_{A1}, \quad V_{B2} = 7V_{A1},$$

ويكون الحجم الكلي الثابت

$$V_{\text{tot}} = 15V_{A1}.$$

بعد فتح الصمام، يمتزج الغازان ويصلان في النهاية إلى درجة حرارة منظم الحرارة T_0 . وعلى الرغم من أن الأسطوانة A معزولة حرارياً، فإن الغاز فيها يمكنه تبادل الطاقة عبر الوصلة المفتوحة مع الأسطوانة B.

تحقق كمية مادة الأكسجين المحفوظة العلاقة

$$n_B RT_0 = p_0 V_{B1} = 14p_0 V_{A1}.$$

وبالنسبة إلى الأرجون،

$$n_A RT_0 = p_{A1} V_{A1} \frac{T_0}{T_{A1}} = 64p_0 V_{A1} \frac{300}{1000} = 19.2p_0 V_{A1}.$$

بتطبيق معادلة الغاز المثالي على المزيج النهائي،

$$p_{\text{mix}} = \frac{(n_A + n_B)RT_0}{V_{\text{tot}}} = \frac{(19.2 + 14)p_0 V_{A1}}{15V_{A1}}.$$

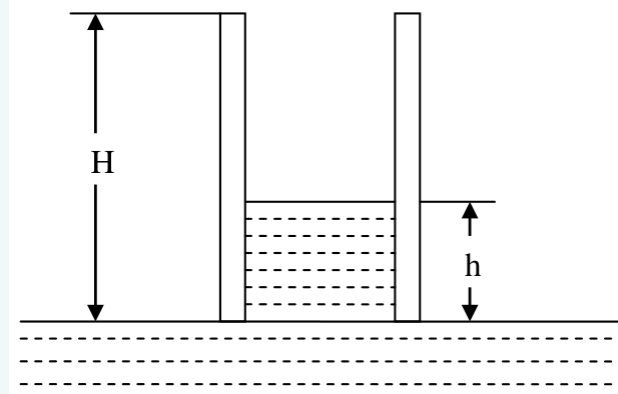
ولذلك

$$p_{\text{mix}} = \frac{166}{75} p_0 = 2.2133p_0 \simeq 2.24 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: ارتفاع سائل عازل بين لوحين مكثف مشحون

نُتِبَ مكثف مستوي ذو لوحين مستطيلين في وضع رأسي، بحيث يلامس جزؤه السفلي سائلاً عازلاً (الشكل 3.1). حدّد ارتفاع السائل بين اللوحين، h ، وفُسّر الظاهرة. نُهْمَل تأثيرات الخاصية الشعرية. يُفْتَرَض أن المسافة بين اللوحين أصغر بكثير من الأبعاد الخطية للوحين.



الشكل 3.1

المعطيات هي: شدة المجال الكهربائي الابتدائية للمكثف المشحون، E ، وكثافة السائل ρ ، وسماحيته الكهربائية النسبية ϵ_r ، وارتفاع لوحين المكثف H . ناقش النتيجة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **المسألة 3 — الارتفاع:** بافتراض أن المكثف المشحون معزول، نضع $a = \varepsilon_r - 1 > 0$. ولتكن h_* الحل الوحيد غير السالب للمعادلة

$$h_* \left(1 + a \frac{h_*}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2\rho g}.$$

يكون ارتفاع الاتزان $h = h_*$ عندما $h_* < H$. ويملاً السائل الفجوة حتى أعلاها، أي $h = H$ في التقريب المثالي، عندما

$$E \geq E_c = \varepsilon_r \sqrt{\frac{2\rho g H}{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}}.$$

- **المسألة 3 — التفسير والمناقشة:** يُولد الاستقطاب قوة كهربائية متجهة إلى أعلى. وعند اتزان السائل على ارتفاع جزئي، يتوازن الضغط الناشئ عنها مع الضغط الهيدروستاتيكي:

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \left[\frac{E}{1 + (\varepsilon_r - 1)h/H} \right]^2.$$

هذا الاتزان وحيد ومستقر. ولا يحدث ارتفاع إذا كان $E = 0$ أو $\varepsilon_r = 1$.

- **المسألة 3 — الحالة البديلة عند ثبات الجهد:** إذا حافظ مصدر على الجهد الابتدائي بدلاً من ذلك، تكون النتيجة

$$h = \min \left\{ H, \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2}{2\rho g} \right\}.$$

الحل

المسألة 3. تشير الإشارة إلى المجال/الابتدائي، مع عدم تحديد مصدر للجهد، إلى مكثف معزول تبقى شحنته الحرة ثابتة. نحل هذه الحالة أولاً.

ليكن عرض اللوحين b ، والمسافة بينهما d ، وليكن سطح السائل الخارجي عند $z = 0$. نعدّ الخزان كبيراً بما يكفي لبقاء هذا المستوى ثابتاً. السائل عازل خطي ومتجانس وغير قابل للانضغاط؛ وسماحية الهواء هي ε_0 . تُهمل تصحيحات السعة الناتجة عن تأثيرات الحواف لأن d أصغر بكثير من أبعاد اللوحين.

السعة والمجال أثناء الارتفاع. عندما يرتفع السائل إلى ارتفاع $h < H$ ، يشكّل الجزان المملوءان بالسائل وبالهواء مكثفين موصولين على التوالي. ومن ثم

$$C(h) = \frac{\varepsilon_0 b(H-h)}{d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r b h}{d} = C_0 \left(1 + a \frac{h}{H} \right),$$

حيث

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 b H}{d}, \quad a = \varepsilon_r - 1.$$

في البداية، $V_0 = Ed$ ، لذا تكون الشحنة المحفوظة

$$Q = C_0 Ed.$$

وبالتالي، يكون المجال بعد الارتفاع

$$\mathcal{E}(h) = \frac{Q}{C(h)d} = \frac{E}{1 + ah/H}.$$

إذن يتناقص المجال مع دخول السائل إلى المكثف المعزول.

ارتفاع الاتزان. عند ثبات الشحنة، تكون الطاقة الكهربائية

$$U_e(h) = \frac{Q^2}{2C(h)} = \frac{\varepsilon_0 b d H E^2}{2(1 + ah/H)}.$$

وطاقة الوضع الثقالية اللازمة لرفع السائل من الخزان إلى الفجوة هي

$$U_g(h) = \int_0^h \rho b d g z dz = \frac{1}{2} \rho b d g h^2.$$

تكون الطاقة الكلية عند قيمة صغرى في حالة الاتزان الساكن. ومن ثم

$$0 = \frac{d}{dh}(U_e + U_g) = b d \left[\rho g h - \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2} \right].$$

وعليه

$$\boxed{\rho g h = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2(1 + ah/H)^2}},$$

أو، بصورة مكافئة،

$$\boxed{h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 a E^2}{2 \rho g}}.$$

تحدد هذه المعادلة التكعيبية ارتفاع الاتزان بدلالة الكميات المعطاة. ويُختزل كل من d و b ، وهو ما يفسر عدم الحاجة إلى قيمتهما.

التفسير الفيزيائي. يؤدي إدخال العازل إلى زيادة السعة وخفض الطاقة الكهربائية عند ثبات الشحنة. وتكون القوة المقابلة المتجهة إلى أعلى

$$F_e = - \frac{dU_e}{dh} \Big|_Q = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a b d \mathcal{E}(h)^2.$$

ومن ثم يكون ضغطها الكهربائي

$$p_e = \frac{F_e}{b d} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 a \mathcal{E}(h)^2.$$

يرتفع السائل حتى يتوازن هذا الضغط مع الضغط الهيدروستاتيكي $\rho g h$ المرتبط بعمود السائل المرتفع.

إن مساواة الطاقتين الكليتين الابتدائية والنهائية تصف عمومًا نقطة انقلاب محتملة أثناء الحركة، لا حالة الاتزان الساكن. وشرط الاتزان هو انعدام مشتقة الطاقة، كما استخدم أعلاه.

المناقشة.

عندما $a > 0$ ، نعرّف

$$f(h) = h \left(1 + a \frac{h}{H} \right)^2.$$

في المجال $h \geq 0$

$$f'(h) = \left(1 + a \frac{h}{H} \right) \left(1 + 3a \frac{h}{H} \right) > 0.$$

إذن يوجد حل واحد غير سالب بالضبط. وهو مستقر: فزيادة h تزيد قوة الثقالة المتجهة إلى أسفل، وتقلل في الوقت نفسه القوة الكهربائية المتجهة إلى أعلى. وبصورة صريحة،

$$\frac{d^2(U_e + U_g)}{dh^2} = b d \left[\rho g + \frac{\varepsilon_0 a^2 E^2}{H(1 + ah/H)^3} \right] > 0.$$

ينطبق الاشتقاق على سطح يقع بين الطرفين السفلي والعلوي للوحين. وبالتعويض بـ $h = H$ في معادلة الاتزان نحصل على

$$H\varepsilon_r^2 = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E_c^2}{2\rho g},$$

ومن هنا نحصل على القيمة الحدية E_c المذكورة أعلاه. إذا كان $E > E_c$ ، فلا يوجد اتزان عند ارتفاع جزئي دون الطرف العلوي: إذ تمتلئ الفجوة بالكامل. ويتطلب تحديد الشكل التفصيلي للسطح بالقرب من الحواف العلوية أو فوقها أخذ مجالات الحواف في الحسبان، وهي مجالات لا يحددها تقريب اللوحين المتوازيين. عندما لا تتغير السعة إلا قليلاً،

$$a \frac{h}{H} \ll 1,$$

يبقى المجال مساوياً تقريباً لقيمته الابتدائية، ويكون

$$h \simeq \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2}{2\rho g}.$$

وعلى وجه الخصوص، يؤول الارتفاع إلى الصفر عندما $E \rightarrow 0$ أو $\varepsilon_r \rightarrow 1$. في المكثف المعزول، لا تؤدي زيادة السماحية دائماً إلى زيادة الارتفاع، لأنها تقلل المجال أيضاً. وعند ثبات E, H ، تكون النهاية عند السماحية الكبيرة

$$h \simeq \left(\frac{\varepsilon_0 E^2 H^2}{2\rho g(\varepsilon_r - 1)} \right)^{1/3} \rightarrow 0.$$

ولصياغة ذلك بصورة كمية أدق، نضع

$$B = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\rho g H}, \quad x = a \frac{h}{H}.$$

تعطي معادلة الاتزان

$$\frac{h}{H} = \sqrt{B} \frac{\sqrt{x}}{1+x} \leq \frac{\sqrt{B}}{2}.$$

إذن، قبل فرض القيد الهندسي $h \leq H$ ، تكون القيمة العظمى للارتفاع عند تغيير السماحية

$$h_{\max} = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 H}{8\rho g}},$$

وتتحقق عندما $x = 1$ ، أو $a = 2/\sqrt{B}$. إذا تجاوزت هذه القيمة العظمى H ، فإن الامتلاء التام يكون ممكناً ضمن مجال من قيم السماحية.

أخيراً، إذا بقي مصدر جهد موصولاً، فإن $V = Ed$ و $\mathcal{E} = E$ يظلان ثابتين. ومع أخذ المصدر في الحسبان، تكون طاقة الوضع الكهربائية الفعالة $-CV^2/2$. وعندئذ يعطي الاتزان

$$\rho g h = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) E^2,$$

مما يؤدي إلى نتيجة الجهد الثابت الواردة في الإجابات.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 4: عدسة مستوية محدبة بين وسطين؛ عدسة بيليه المشطورة

تُوضَع عدسة رقيقة مستوية محدبة، قطرها $2r$ ، ونصف قطر تكورها R ، ومعامل انكسارها n_o ، بحيث يوجد الهواء على يسارها ($n_1 = 1$)، ويوجد على يمينها وسط شفاف معامل انكساره $n_2 \neq 1$. يتجه الوجه المحدب للعدسة نحو الهواء. ويوجد في الهواء مصدر نقطي لضوء أحادي اللون، على بُعد s_1 من العدسة، مقيساً على المحور البصري الرئيسي.

(a) أثبت، باستخدام تقريب غاوس، أن موضع الصورة، المحدب ببُعدها s_2 عن العدسة، وموضع المصدر الضوئي يرتبطان بالعلاقة:

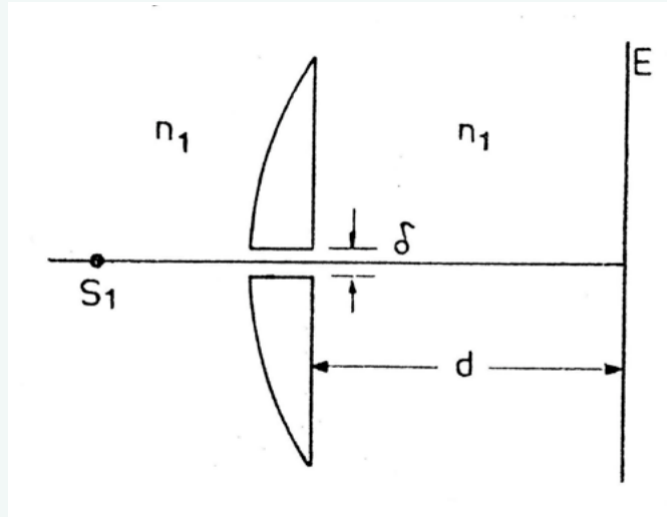
$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1$$

حيث f_1 و f_2 هما البُعدان البُوريان للعدسة في الهواء وفي الوسط ذي معامل الانكسار n_2 ، على الترتيب.

ملاحظة: جميع معاملات الانكسار هي معاملات انكسار مطلقة.

(b) تُقطع العدسة إلى جزأين متساويين بمستوى عمودي على وجهها المستوي. ويُباعد بين الجزأين بمسافة $r \ll \delta$ (عدسة بيليه). ويوضع مصدر ضوئي نقطي على محور تناظر المنظومة الناتجة، على بُعد s_1 ($s_1 > f_1$) (الشكل 4.1). وتوجد على يمين العدسة شاشة E على بُعد d . والشاشة موازية للوجه المستوي للعدسة. تظهر على هذه الشاشة N من أهداب التداخل إذا كان الوسط على يمين العدسة هو الهواء.

حدّد N بدلالة الطول الموجي.



الشكل 4.1

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• (a) البُعدان البُوريان ومعادلة تكوّن الصورة هما

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1},$$

$$\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1.$$

• (b) لنضع

$$f = f_1 = \frac{R}{n_o - 1}, \quad v = \frac{fs_1}{s_1 - f}.$$

عند الموضع المعتاد للشاشة، حيث لا تحدّ الحواف الخارجية للفتحة من شريط التداخل،

$$N \simeq N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda[d(s_1 - f) - fs_1]}.$$

ويطلب ذلك

$$d > v, \quad r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

هنا N هو العدد المعتاد الذي يُحصل عليه بقسمة عرض منطقة التراكب على المسافة بين الأهداب المتتالية.

وعند أخذ اقتطاع الحزم بسبب محدودية الفتحة في الحساب، يكون العدد المقابل

$$\bar{N} = \begin{cases} 0, & d \leq v, \\ \max \left\{ 0, \min \left[N_0, \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0 \right] \right\}, & d > v. \end{cases}$$

عندما يكون عرض منطقة التراكب موجباً، يكون العدد الصحيح للقيم العظمى المضينة، بما فيها القيم العظمى الواقعة على الحدود،

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{\bar{N}}{2} \right\rfloor + 1.$$

الحل

(a) الانكسار عبر السطحين

نستخدم تقريب العدسة الرقيقة وتقريب غاوس: نهمل المسافة الفاصلة بين السطحين، ونحتفظ فقط بالحدود من الرتبة الأولى في ارتفاعات الأشعة وزواياها. نأخذ اتجاه الانتشار من اليسار إلى اليمين، مع اعتبار s_1 موجباً للمصدر الحقيقي و s_2 موجباً للصورة الحقيقية.

لننظر إلى شعاع ساقط على ارتفاع y . زاويته مع المحور البصري هي

$$\theta_1 \simeq \frac{y}{s_1}.$$

بما أن مركز التكور يقع إلى يمين السطح المحدب، فإن زاوية العمود المقام على السطح هي

$$\nu \simeq -\frac{y}{R}.$$

لتكن θ_o زاوية الشعاع داخل العدسة. يعطي قانون سنيل، في تقريب الزوايا الصغيرة،

$$\theta_1 - \nu = n_o(\theta_o - \nu),$$

ومن ثم

$$n_o\theta_o = \theta_1 - \frac{(n_o - 1)y}{R}.$$

عند الوجه المستوي، الذي يوازي عموده المقام المحور البصري،

$$n_2\theta_2 = n_o\theta_o.$$

بالنسبة إلى شعاع يصل إلى الصورة الواقعة على المحور،

$$\theta_2 \simeq -\frac{y}{s_2}.$$

بدمج هذه المعادلات واختزال y ، نحصل على

$$\boxed{\frac{1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2} = \frac{n_o - 1}{R}}.$$

البُعد البُؤري الأمامي هو بُعد المصدر الذي يجعل الأشعة الخارجة متوازية. بوضع $s_2 \rightarrow \infty$ ،

$$f_1 = \frac{R}{n_o - 1}.$$

البُعد البُؤري الخلفي هو بُعد الصورة عندما تكون الأشعة الساقطة متوازية. بوضع $s_1 \rightarrow \infty$ ،

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_o - 1}.$$

إذن، بقسمة معادلة تكوّن الصورة على $(n_o - 1)/R$ ، نحصل على

$$\boxed{\frac{f_1}{s_1} + \frac{f_2}{s_2} = 1}.$$

تشمل العلاقة نفسها الصور الوهمية إذا عومل s_2 بوصفه مسافة ذات إشارة.

(b) الصورتان اللتان يكونهما النصفان

الوسطان الخارجيان الآن كلاهما هواء، لذا فإن البُعد البُؤري هو

$$f = \frac{R}{n_o - 1}.$$

يكون كل نصف صورة على بُعد طولي v ، حيث

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}, \quad v = \frac{f s_1}{s_1 - f} > 0.$$

نختار الإحداثي المستعرض y عمودياً على مستوى القطع. عرض الفجوة الكامل الموضح في الشكل هو δ ، ولذلك يقع محورا النصفين عند

$$c_{\pm} = \pm \frac{\delta}{2}.$$

بالنسبة إلى محور نصف العدسة، يكون ارتفاع المصدر $-c_{\pm}$. والتكبير المستعرض هو $-v/s_1$ ، مما يعطي موضعَي الصورتين

$$y_{\pm} = c_{\pm} + \left(-\frac{v}{s_1}\right)(-c_{\pm}) = \pm \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{v}{s_1}\right).$$

وعليه، فإن المسافة الفاصلة بين الصورتين هي

$$\boxed{b = \delta \left(1 + \frac{v}{s_1}\right) = \frac{\delta v}{f}}.$$

تعمل هاتان الصورتان بوصفهما مصدرين ثانويين مترابطين. ويجعل التناظر الانعكاسي طوريهما متساويين، ولذلك يكون الهدب المركزي مضيئاً.

المسافة بين الأهداب

بالنسبة إلى شاشة تقع خلف مستوى الصورة، لنضع

$$L = d - v > 0.$$

عند الإحداثي y على الشاشة، يكون فرق المسار من الصورتين في التقريب المحوري

$$\Delta(y) \simeq \frac{by}{L}.$$

ومن ثم تحقق الأهداب المضيئة

$$y_m = \frac{m\lambda L}{b}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

وتكون المسافة بينها

$$\boxed{\beta = \frac{\lambda L}{b} = \frac{\lambda f(d-v)}{\delta v}}.$$

وهي خطوط مستقيمة موازية لمستوى القطع، ضمن التقريب المحوري.

عرض منطقة تراكب الحزمتين

نستخدم الأغلفة الهندسية للحزم ونهمل الحيود عند حواف الفتحة.

لا ينحرف الشعاع المار بالمركز البصري لكل نصف. ويصل هذان الشعاعان إلى الشاشة عند

$$y = \pm H, \quad H = \frac{\delta}{2} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

بشرط ألا تقطع الحواف الخارجية للفتحة جزءاً من منطقة التراكب، يكون عرضها إذن

$$W_0 = 2H = \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

بقسمة هذا العرض على المسافة بين الأهداب، نحصل على

$$N_0 = \frac{W_0}{\beta} = \frac{\delta^2 v}{\lambda f(d-v)} \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

بالتعويض بـ $v = fs_1/(s_1 - f)$ ،

$$\boxed{N_0 = \frac{\delta^2(s_1 + d)}{\lambda [d(s_1 - f) - fs_1]}}.$$

عند ثبات الترتيب الهندسي ومعامل الانكسار، تتناسب هذه الكمية مع $1/\lambda$.

شروط الفتحة المحدودة

لا يحدد نص المسألة موضع الشاشة بالنسبة إلى مستوى الصورة، ولذلك يجب أيضاً التحقق من شروط التراكب.

يمر الشعاع الذي يعبر النصف العلوي عند ارتفاع y_0 بصورته عند ارتفاع y_+ . ويكون ارتفاعه على الشاشة

$$y(d) = \left(1 - \frac{d}{v} \right) y_0 + \frac{d}{v} y_+.$$

يشغل النصف العلوي المجال

$$\frac{\delta}{2} \leq y_0 \leq \frac{\delta}{2} + r.$$

عندما يكون $d > v$ ، نعرّف

$$\rho = r \left(\frac{d}{v} - 1 \right).$$

على المقطع المركزي للشاشة، تشغل الحزمة العلوية المجال

$$H - \rho \leq y \leq H,$$

وتشغل الحزمة السفلية المجال

$$-H \leq y \leq \rho - H.$$

تتناظر منطقة تراكبهما حول $y = 0$ ، ويكون عرضها

$$W = \begin{cases} 0, & \rho \leq H, \\ 2(\rho - H), & H < \rho < 2H, \\ 2H, & \rho \geq 2H. \end{cases}$$

ومن ثم ينطبق التعبير المعتاد N_0 عندما

$$\rho \geq 2H \iff r \left(\frac{d}{v} - 1 \right) \geq \delta \left(1 + \frac{d}{s_1} \right).$$

في حالة التراكم الجزئي،

$$\frac{W}{\beta} = \frac{2\rho}{\beta} - N_0 = \frac{2r\delta}{\lambda f} - N_0.$$

وهذا يثبت التعبير العام لـ $\bar{N} = W/\beta$ الوارد في الإجابات. عندما يكون $d \leq v$ ، تبقى الحزمتان الهندسيتان على جانبيين متقابلين من محور التناظر ولا تتراكبان.

أخيرًا، عندما يكون $W > 0$ ، تقع القيم العظمى المضيئة عند الأعداد الصحيحة التي تحقق

$$|m| \leq \frac{W}{2\beta}.$$

باحساب القيم العظمى الواقعة تمامًا على الحدود، نحصل على

$$N_{\text{bright}} = 2 \left\lfloor \frac{W}{2\beta} \right\rfloor + 1.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.