

IPhO 1971

理论题与解答 · 保加利亚索非亚 · 4 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1971/

题目 1：无摩擦平面上三棱柱上的两个物块

如图 1 所示，一个质量为 M 的三棱柱以一个侧面放置在无摩擦的水平面上。另外两个侧面与水平面的夹角分别为 α_1 和 α_2 。两个质量分别为 m_1 和 m_2 的物块由一根不可伸长的细线连接，可在三棱柱表面上无摩擦地滑动。支承细线的滑轮质量可忽略不计。

- 用三棱柱的加速度 a_0 表示物块相对于三棱柱的加速度 a 。
- 用已知量和重力加速度 g 求三棱柱的加速度 a_0 。
- 当质量比 m_1/m_2 为多少时，三棱柱处于平衡状态？

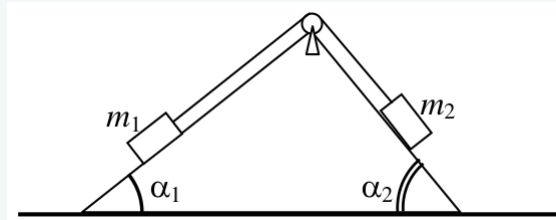


图 1

题目译自官方英文原文。

答案

原题有三个未编号的项目，且未给出分值；下文将其标为 (1)–(3)。

取 a_0 向右为正；当 m_1 相对于三棱柱沿其所在斜面向下加速、 m_2 相对于三棱柱沿其所在斜面向上加速时，取 a 为正。

$$1. \quad a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

$$2. \quad a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$3. \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

解答

采用通常的理想细线近似：细线质量为零且保持绷紧，滑轮无摩擦地转动，其转动惯量可忽略不计。因此，细线两侧的张力 T 相同。三棱柱沿水平方向平动，物块始终与各自所在的斜面接触。

由于细线不可伸长，且滑轮固定在三棱柱上，若分别以沿左侧斜面向下和沿右侧斜面向上为正方向，则两个物块相对于三棱柱的加速度的代数值相等。

(1) 用 a_0 表示相对加速度

在与水平面固连的惯性参考系中分析。每个物块的绝对加速度等于三棱柱的加速度与该物块相对于三棱柱的加速度之和。

对于 m_1 ，取沿其所在斜面向下为正方向。三棱柱向右的加速度在此方向上的投影为 $-a_0 \cos \alpha_1$ 。因此，由沿斜面方向的牛顿第二定律得

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

对于 m_2 ，取沿其所在斜面向上为正方向。相应的方程为

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

支持力沿斜面方向没有分量。将两式相加，消去 T ：

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

两边除以 $m_1 + m_2$ ，即得答案 (1)。

(2) 三棱柱的加速度

整个系统在水平方向上不受外力：重力和水平支承面的支持力均沿竖直方向。因此，系统的水平动量守恒，其质心的水平加速度为零。

当 a 为正时，两个物块相对于三棱柱的加速度的水平分量均向左。它们的绝对加速度的水平分量为

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

因此

$$Ma_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

即

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

为简化表达式，定义

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

这两个方程变为

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

消去 a ，得

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

由此得到答案 (2)。

对于图示的斜面，有 $0 < C < S$ ，所以

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

因此，若 $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$ ，三棱柱向右加速；若不等号反向，则三棱柱向左加速。

(3) 三棱柱的平衡条件

平衡要求 $a_0 = 0$ 。由于 $C > 0$ ，水平动量守恒还要求 $a = 0$ 。沿斜面方向的方程化为

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

因此，

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

在这一质量比下，初始静止的三棱柱将保持静止。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 2：由水银柱封闭的管内的氢气

一根横截面积为 $S = 1.0 \text{ cm}^2$ 的竖直玻璃管内装有未知量的氢气。管的上端封闭，另一端开口并浸入盛有水银的槽中。玻璃管和水银槽置于密闭容器内，容器内空气的温度为 $T_0 = 273 \text{ K}$ ，压强为 $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Pa}$ 。在这些条件下，管内水银柱高出槽内水银液面的高度为 $h_0 = 0.70 \text{ m}$ 。

容器的一面壁是活塞，通过移动活塞使空气等温膨胀，直至压强降至 $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。因此，管内水银柱的高度降至 $h_1 = 0.40 \text{ m}$ 。随后，在体积不变的条件下将容器加热至某一温度 T_2 ，直到水银柱升至 $h_2 = 0.50 \text{ m}$ 。最后，使容器内的空气在恒定压强下膨胀，管内水银液面最终稳定在高出槽内水银液面 $h_3 = 0.45 \text{ m}$ 的位置。

假设系统在所有过程中均处于力学平衡和热平衡状态，计算氢气的质量 m 、中间状态的温度 T_2 以及最终状态的压强 P 。

水银在温度 T_0 下的密度为 $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ ，水银的膨胀系数为 $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ，气体常量为 $R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol} \times \text{K})$ 。不考虑玻璃管的热膨胀以及槽内水银液面的变化。

提示。若 ΔT 为系统的温度变化量，则 $\beta \Delta T = x \ll 1$ 。此时可使用近似式：

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

题目译自官方英文原文。

答案

第 2 题没有编号的小问。按题目要求的顺序：

- 氢气质量： $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$ 。
- 中间状态的温度： $T_2 \approx 358 \text{ K}$ 。
- 最终氢气压强： $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$ 。最终容器内空气的压强为 $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$ ；
题目未说明“最终状态的压强 P ”指的是氢气的压强还是容器内空气的压强，因此两者均给出。

解答

将氢气和空气视为理想气体，并忽略气体内部由重力引起的静压变化。采用以下标准值：

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

设 H 为玻璃管封闭端高出槽内水银液面的高度。由于忽略玻璃的膨胀和槽内液面的变化， H 为常量。在状态 i 下，氢气的体积为

$$V_i = S(H - h_i).$$

用 P_i 表示容器内空气的压强，用 p_i 表示氢气的压强。相互连通的水银处于流体静力学平衡，因此

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

热平衡意味着在每个状态下，两种气体和水银的温度均相同。

氢气质量 m 。

第一次膨胀是在温度 T_0 下进行的等温过程，因此水银的密度保持为 ρ_0 。于是

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa}, \\ p_1 &= P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

一定量的氢气遵循玻意耳定律：

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

因此，

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m}.$$

代入 $S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ，氢气的物质的量为

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

因此，

$$m = n M_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}.$$

为便于后续计算，定义常量

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

于是，氢气的理想气体状态方程变为

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

中间状态的温度 T_2 。

由水银的体积膨胀可得其密度随温度变化的关系：

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

其中最后一个表达式使用了题目给出的一阶近似。

在等容加热过程中，容器内的空气满足

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

将其与水银柱高度为 h_2 时的流体静力学平衡条件及氢气状态方程联立，得到

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

合并含有 T_2 的项，得到

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

因此

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K},$$

所以

$$T_2 \approx 358 \text{ K}.$$

此阶段容器内空气的压强为

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

最终状态的压强。

最后的膨胀过程在容器内空气压强保持不变的条件下进行。因此，

$$P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

为确定氢气的压强，还必须求出其最终温度 T_3 。当 $h_3 = 0.45 \text{ m}$ 时，

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

整理得，

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

于是

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K}.$$

因此，最终氢气压强为

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa},$$

即

$$P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

最后，膨胀参数为

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

两者都很小，与提示中要求采用的近似相符。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。

题目 3：由电池、电容器和电阻组成的立方体电路

四个电动势分别为 $E_1 = 4 \text{ V}$ 、 $E_2 = 8 \text{ V}$ 、 $E_3 = 12 \text{ V}$ 和 $E_4 = 16 \text{ V}$ 的电池、四个电容相同的电容器 ($C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$) 以及四个阻值相同的电阻，连接成图 3 所示的电路。电池的内阻可忽略不计。

- 计算系统达到稳态时电容器中储存的总能量 W 。

- 将 H 点与 B 点短接。求新的稳态下电容器 C_2 上的电荷量。

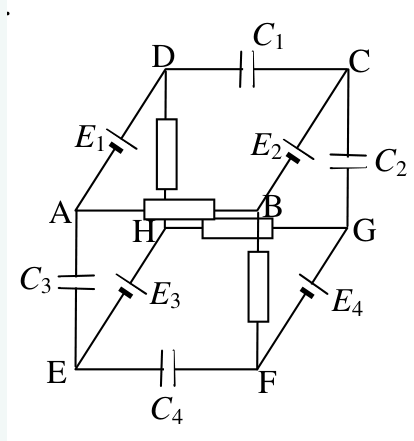


图 3

题目译自官方英文原文。

答案

以下将上述两个未编号的条目分别记为 (1) 和 (2)。

1. 储存的总能量: $W = 26 \mu\text{J}$ 。
2. 将 H 与 B 短接后, 电容器 C_2 上的电荷量: $Q_2 = 0 \text{ C}$ 。

解答

设每个电阻的阻值为 R 。电阻位于棱 AB 、 BF 、 DH 和 HG 上; 投影图中的交叉处并不构成额外的连接点。

电池符号中的长线表示正极, 因此

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

在稳态下, 电容器两端的电压保持不变, 且没有电流通过电容器。

(1) 储存的总能量

将含电容器的支路视为断路后, 唯一的导电回路为

$$F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F.$$

含有 E_2 和 E_3 的支路中没有稳态电流。

沿该导电回路应用基尔霍夫电压定律, 得到

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0.$$

因此, 每个电阻两端的电压降为

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

取 $V_F = 0$, 根据电池引起的电势升高及随后依次发生的电势降低, 可得

$$V_G = 16 \text{ V}, \quad V_H = 13 \text{ V}, \quad V_D = 10 \text{ V}, \\ V_A = 6 \text{ V}, \quad V_B = 3 \text{ V}.$$

其余电池确定了

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}.$$

因此，各电容器两端的电压如下：

电容器	电压大小	带正电的极板
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

利用静电能公式 $W_i = \frac{1}{2} C_i U_i^2$ ，有

$$W = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6} \text{ F}) (1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2) \text{ V}^2.$$

因此，

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \mu\text{J}.$$

(2) 将 H 与 B 短接后 C_2 上的电荷量

短接使得 $V_H = V_B$ 。选择它们的共同电势为零：

$$V_H = V_B = 0.$$

于是，电池 E_2 确定了

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}.$$

在新的稳态下，电容器中同样没有电流通过。电池 E_4 在经过两个等值电阻 GH 和 BF 的回路中驱动电流，因此

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

因此，G 相对于 H 的电势为

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}.$$

由此可得 $V_G = V_C$ ，所以 C_2 两端的电压为零：

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

因此，其最终电荷量为

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 4：平面镜前球形鱼缸中的鱼

一个装满水的球形鱼缸放置在一面竖直平面镜前。鱼缸的半径为 R ，其球心到镜面的距离为 $3R$ 。一条小鱼起初位于最靠近镜面的点，随后开始以速率 v 沿缸壁运动。观察者从很远处沿一条通过鱼缸球心的水平直线观察这条鱼。

观察者看到的鱼的两个像将以多大的相对速度 v_{rel} 彼此分离？用 v 表示你的答案。假设：

- 鱼缸壁由很薄的玻璃制成。
- 水的折射率为 $n = 4/3$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- 4. 初始相对速度为

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

直接看到的像以速率 $2v$ 运动，而通过反射看到的像则沿相反方向以速率 $2v/3$ 运动。

解答

4. 取观察轴为 x 轴，正方向由观察者指向镜面。令鱼缸球心位于 $x = 0$ ，镜面位于 $x = 3R$ ，鱼的初始位置为 $x = R$ 。

沿鱼的初始运动方向选取横向的 y 轴正方向。由于鱼沿球形缸壁的切线方向运动，其位移保留到时间的一阶项为

$$y = vt,$$

而其轴向位移为时间的二阶量。因此，在计算像的**初始**速度时，可以将鱼的轴向坐标保持为 R 。

薄玻璃的影响可以忽略：其两个几乎重合的表面上的折射可合并为水与空气之间的直接折射。我们使用近轴形式的斯涅尔定律，这对于分析轴线附近的初始运动已足够。

根据光路可逆性，从远处的观察者向鱼反向追迹光线。在所需的精度下，这些光线起初平行于轴线传播。它们在朝向观察者的表面 $x = -R$ 处的高度 h 给出了像的视横向位置。

在此表面上，指向水内的法线与轴线成小角度 $-h/R$ 。若折射光线与轴线的夹角为 α ，则由斯涅尔定律得

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right).$$

因此，

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

光线穿过鱼缸后，在朝向镜面的表面 $x = R$ 处的高度为

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}.$$

直接看到的像。 对于直接光路，反向追迹的光线在此表面处到达鱼，因此 $k = y$ 。于是

$$h_d = 2y, \quad \boxed{\dot{h}_d = 2v}.$$

通过反射看到的像。 对于这条光路，反向追迹的光线继续穿过朝向镜面的表面，向镜面传播。该表面的外法线与轴线成角度 k/R 。若光线在空气中与轴线的夹角为 γ ，则由斯涅尔定律得

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}.$$

利用 $n = 4/3$ 、 $\alpha = -h/(4R)$ 和 $k = h/2$ ，得

$$\gamma = n\alpha - (n-1)\frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

我们可以用鱼的镜像代替鱼，从而将平面镜的反射光路展开。其轴向坐标为

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

而其横向坐标仍为 y 。由于鱼位于缸壁处，光线最终到达鱼的位置时发生的折射不会引入额外的传播距离。

展开后的光线从鱼缸朝向镜面的表面传播到这一镜像位置，沿轴向经过的距离为 $4R$ 。因此

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

于是，通过反射看到的像的视横向位置和速度为

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}.$$

两个像沿相反的横向方向运动。因此，它们的初始相对速度为

$$\boxed{v_{\text{rel}} = |\dot{h}_d - \dot{h}_r| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}.$$

解答已与官方解答核对。