

IPhO 1971

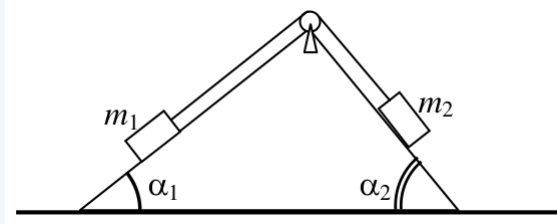
Teorik sorular ve çözümler · Sofya, Bulgaristan · 4 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1971/

Soru 1: Sürtünmesiz bir düzlem üzerindeki üçgen prizmanın üzerinde bulunan iki blok

Kütlesi M olan bir üçgen prizma, Şekil 1'de gösterildiği gibi bir yüzü sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerine gelecek şekilde yerleştirilmiştir. Diğer iki yüz, bu düzlemle sırasıyla α_1 ve α_2 açılarını yapmaktadır. Uzun bir iple birbirine bağlanmış, kütleleri m_1 ve m_2 olan iki blok, prizmanın yüzeyi üzerinde sürtünmesiz olarak kayabilmektedir. İpin üzerinden geçtiği makaranın kütlesi ihmal edilebilir.

- Blokların prizmaya göre a ivmesini, prizmanın a_0 ivmesi cinsinden ifade edin.
- Prizmanın a_0 ivmesini, verilen büyüklükler ve yer çekimi ivmesi g cinsinden bulun.
- m_1/m_2 oranının hangi değerinde prizma dengede olur?



Şekil 1

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Kaynakta numaralandırılmamış üç madde vardır ve puan değerleri verilmemiştir; bu maddeler aşağıda **(1)–(3)** olarak etiketlenmiştir.

a_0 için sağ yönü pozitif alın; a için ise prizmaya göre m_1 'in bulunduğu yüz boyunca aşağı, m_2 'nin bulunduğu yüz boyunca yukarı ivmelendiği yönleri pozitif alın.

$$1. \quad a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

$$2. \quad a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$$

$$3. \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

Çözüm

Alışılmış ideal ip yaklaşımını kullanıyoruz: ip kütsüz ve gergindir; makara sürtünmesiz döner ve eylemsizliği ihmal edilebilir. Dolayısıyla T gerilmesi her iki tarafta aynıdır. Prizma yatay doğrultuda öteleme hareketi yapar ve bloklar bulundukları yüzlerle temas hâlinde kalır.

İp uzamadığı ve makara prizmaya sabitlenmiş olduğu için, sol yüz boyunca aşağı ve sağ yüz boyunca yukarı yönlerde ölçülen bağıl ivmelerin işaretli değerleri eşittir.

(1) a_0 cinsinden bağıl ivme

Yatay düzleme bağıl eylemsiz referans sisteminde çalışalım. Her bloğun mutlak ivmesi, prizmanın ivmesi ile bloğun prizmaya göre ivmesinin toplamına eşittir.

m_1 için pozitif yönü, bulunduğu eğik yüz boyunca aşağı doğru alalım. Prizmanın sağa doğru ivmesinin bu yöndeki izdüşümü $-a_0 \cos \alpha_1$ 'dir. Dolayısıyla eğik yüz doğrultusunda Newton'ın ikinci yasası şu denklemi verir:

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

m_2 için pozitif yönü, bulunduğu eğik yüz boyunca yukarı doğru alalım. Buna karşılık gelen denklem şöyledir:

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

Normal kuvvetlerin eğik yüzler doğrultusunda bileşenleri yoktur. Denklemleri topladığımızda T elenir:

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

$m_1 + m_2$ 'ye bölerek (1) numaralı cevabı elde ederiz.

(2) Prizmanın ivmesi

Sistemin tamamına etki eden yatay bir dış kuvvet yoktur: yer çekimi kuvveti ve sistemi taşıyan düzlemin normal kuvveti düşeydir. Bu nedenle sistemin yatay momentumu korunur; dolayısıyla kütle merkezinin yatay ivmesi sıfırdır.

a pozitif olduğunda, her iki blok da prizmaya göre sola doğru ivmelenir. Blokların mutlak yatay ivmeleri şöyledir:

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

Böylece

$$Ma_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

ya da

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

İfadeleri kısaltmak için şu tanımları yapalım:

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

İki denklem şu hâle gelir:

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

a 'yı elediğimizde

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

elde edilir; bu da (2) numaralı cevabı verir.

Gösterilen eğik yüzler için $0 < C < S$ olduğundan

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

Dolayısıyla $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$ ise prizma sağa doğru, eşitsizlik ters yöndeysse sola doğru ivmelenir.

(3) Prizmanın denge koşulu

Denge için $a_0 = 0$ olmalıdır. $C > 0$ olduğundan, yatay momentumun korunumu bu durumda $a = 0$ olmasını da gerektirir. Eğik yüzler doğrultusundaki denklemler şu hâle indirgenir:

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

Sonuç olarak,

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}}.$$

Bu oranda, başlangıçta durgun olan bir prizma durgun kalır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 2: Cıva sütunuyla kapatılmış bir tüpteki hidrojen

Kesit alanı $S = 1.0 \text{ cm}^2$ olan düşey bir cam tüp, bilinmeyen miktarda hidrojen içermektedir. Tüpün üst ucu kapalıdır. Diğer ucu açıktır ve cıva dolu bir kaba daldırılmıştır. Tüp ve kap, sıcaklığı $T_0 = 273 \text{ K}$ ve basıncı $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Pa}$ olan hava içeren sızdırmaz bir bölmeye yerleştirilmiştir. Bu koşullarda tüpteki cıva sütununun kaptaki cıva seviyesinden yüksekliği $h_0 = 0.70 \text{ m}$ olmaktadır.

Bölmenin duvarlarından biri, havayı izotermal olarak $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$ basıncına kadar genleştiren bir pistondur. Bunun sonucunda tüpteki cıva sütununun yüksekliği $h_1 = 0.40 \text{ m}$ değerine düşer. Ardından bölme, cıva sütunu $h_2 = 0.50 \text{ m}$ yüksekliğine ulaşınca kadar sabit hacimde bir T_2 sıcaklığına kadar ısıtılır. Son olarak bölmedeki hava sabit basınçta genleştirilir ve tüpteki cıva seviyesi, kaptaki cıva seviyesinin $h_3 = 0.45 \text{ m}$ üzerinde dengeye gelir.

Sistemin tüm süreçler boyunca mekanik ve ısı dengede olduğu kabul edilerek hidrojenin kütlesini m , ara sıcaklığı T_2 ve son durumdaki basıncı P hesaplayınız.

Cıvanın T_0 sıcaklığındaki yoğunluğu $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, cıvanın genleşme katsayısı $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ve gaz sabiti $R = 8.314 \text{ J/(mol} \times \text{K)}$ olarak verilmiştir. Cam tüpün ısı genleşmesi ve kaptaki cıva seviyesinin değişimleri dikkate alınmayacaktır.

İpucu. Sistemdeki sıcaklık değişimi ΔT ise $\beta \Delta T = x \ll 1$ olur. Bu durumda şu yaklaşımı kullanabilirsiniz:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Soru 2'nin numaralandırılmış alt bölümleri yoktur. İstenen sırayla:

- **Hidrojenin kütlesi:** $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$.
- **Ara sıcaklık:** $T_2 \approx 358 \text{ K}$.
- **Hidrojenin son basıncı:** $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$. Bölmedeki havanın son basıncı $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$ olur; problem metni "son durumdaki basınç P " ile hidrojenin basıncının mı yoksa bölmedeki havanın basıncının mı kastedildiğini belirtmediği için ikisi de verilmiştir.

Çözüm

Hidrojen ve havayı ideal gaz olarak ele alalım ve gazların içindeki hidrostatik basınç değişimlerini ihmal edelim. Şu standart değerleri kullanalım:

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

Tüpün kapalı ucunun kaptaki cıva yüzeyinden yüksekliği H olsun. Camın genişmesi ve kaptaki seviyenin değişimleri ihmal edildiğinden H sabittir. i durumunda hidrojenin hacmi

$$V_i = S(H - h_i).$$

olur.

Bölmedeki havanın basıncını P_i , hidrojenin basıncını ise p_i ile gösterelim. Birbirine bağlı cıva kısımlarındaki hidrostatik denge

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

bağıntısını verir. Isıl denge, her durumda her iki gazın ve cıvanın aynı sıcaklıkta olması anlamına gelir.

Hidrojenin kütlesi m .

İlk genişleme T_0 sıcaklığında izotermaldir; dolayısıyla cıvanın yoğunluğu ρ_0 olarak kalır. Böylece

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa}, \\ p_1 &= P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Miktarı sabit olan hidrojen Boyle yasasına uyar:

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

Dolayısıyla,

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m}.$$

$S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ kullanıldığında hidrojenin madde miktarı

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$m = n M_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}.$$

Kalan hesaplamalar için şu sabiti tanımlayalım:

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

Böylece hidrojenin ideal gaz denklemi şu biçimi alır:

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

Ara sıcaklık T_2 .

Cıvanın hacimsel genişlemesinden, sıcaklığa bağlı yoğunluğu elde edilir:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

burada son ifadede verilen birinci mertebe yaklaşımı kullanılmıştır.

Sabit hacimde ısıtma sırasında bölmedeki hava şu bağıntıyı sağlar:

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

Bu bağıntı, h_2 yüksekliğindeki hidrostatik denge ve hidrojenin gaz yasası ile birleştirildiğinde,

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

T_2 içeren terimler bir araya toplandığında

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

elde edilir. Buradan

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K},$$

dolayısıyla

$$\boxed{T_2 \approx 358 \text{ K.}}$$

Bu aşamada bölmedeki havanın basıncı

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

olur.

Son durumdaki basınç.

Son genişleme, bölmedeki havanın basıncı sabit tutularak gerçekleşir. Bu nedenle,

$$\boxed{P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa.}}$$

Hidrojenin basıncını belirlemek için son sıcaklığı T_3 de bulunmalıdır. $h_3 = 0.45 \text{ m}$ yüksekliğinde,

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

Yeniden düzenlendiğinde,

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

Böylece

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K}.$$

Sonuç olarak hidrojenin son basıncı

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa},$$

ya da

$$P_{H_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

olur.

Son olarak, genişleme parametreleri

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

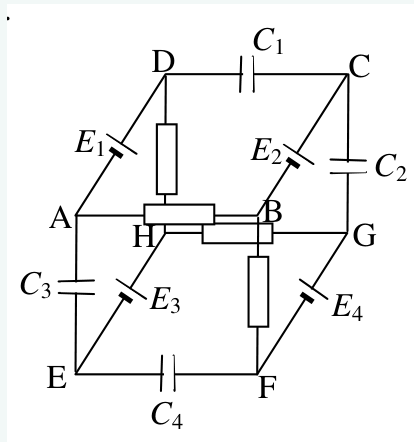
olarak bulunur. Her ikisi de küçüktür ve bu, ipucunda istenen yaklaşımla tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.

Soru 3: Piller, kondansatörler ve dirençlerden oluşan küp biçimindeki devre

Elektromotor kuvvetleri $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$ ve $E_4 = 16 \text{ V}$ olan dört pil, sığaları eşit olan dört kondansatör, $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$, ve eşit dirençli dört direnç, Şekil 3'te gösterilen devrede bağlanmıştır. Pillerin iç dirençleri ihmal edilebilir.

- Sistem kararlı duruma ulaştığında kondansatörlerde biriken toplam enerjiyi W hesaplayınız.
- H ve B noktaları kısa devre edilir. Yeni kararlı durumda C_2 kondansatörünün yükünü bulunuz.



Şekil 3

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Numaralandırılmamış iki madde aşağıda (1) ve (2) olarak adlandırılmıştır.

1. Depolanan toplam enerji: $W = 26 \mu\text{J}$.

2. H ve B kısa devre edildikten sonra C_2 kondansatörünün yükü: $Q_2 = 0 \text{ C}$.

Çözüm

Her bir direncin direnç değeri R olsun. Dirençler AB , BF , DH ve HG kenarlarında yer alır; izdüşümdeki kesişmeler ek bağlantı noktaları oluşturmaz.

Pil sembollerindeki uzun çizgiler pozitif kutupları gösterir; dolayısıyla

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

Kararlı durumda kondansatörlerin gerilimleri sabittir ve kondansatörlerden akım geçmez.

(1) Depolanan toplam enerji

Kondansatörlerin bulunduğu kollar açık devre olduğunda, akımın geçebildiği tek kapalı çevrim

$$F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F$$

şeklinde. E_2 ve E_3 pillerinin bulunduğu kollardan kararlı durumda akım geçmez.

Akım geçen kapalı çevrime Kirchhoff'un gerilim yasası uygulandığında

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0$$

elde edilir. Böylece her bir direnç üzerindeki gerilim düşümü

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}$$

olur.

$V_F = 0$ alındığında, pildeki gerilim artışı ve ardışık gerilim düşümleri

$$\begin{aligned} V_G &= 16 \text{ V}, & V_H &= 13 \text{ V}, & V_D &= 10 \text{ V}, \\ V_A &= 6 \text{ V}, & V_B &= 3 \text{ V} \end{aligned}$$

değerlerini verir. Diğer piller ise

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}$$

değerlerini belirler.

Buna göre kondansatörlerin gerilimleri şöyledir:

Kondansatör	Gerilimin büyüklüğü	Pozitif levha
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

Elektrostatik enerji bağıntısı $W_i = \frac{1}{2}C_i U_i^2$ kullanılarak

$$W = \frac{1}{2}(1 \times 10^{-6} \text{ F}) (1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2) \text{ V}^2$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \mu\text{J}.$$

(2) H ve B kısa devre edildikten sonra C_2 kondansatörünün yükü

Kısa devre sonucunda $V_H = V_B$ olur. Bu noktaların ortak potansiyelini sıfır seçelim:

$$V_H = V_B = 0.$$

Bu durumda E_2 pili

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}$$

değerini belirler.

Yeni kararlı durumda da kondansatörlerden akım geçmez. E_4 pili, eşit dirençli GH ve BF dirençlerinden geçen bir çevrimde akım oluşturur; dolayısıyla

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

G noktasının H noktasına göre potansiyeli bu nedenle

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}$$

olur. Böylece $V_G = V_C$ olur ve C_2 üzerindeki gerilim sıfırlanır:

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

Sonuç olarak son yükü

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}$$

olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 4: Düzlem ayna önündeki küresel bir akvaryumda bulunan balık

Su ile dolu küresel bir akvaryum, düşey bir düzlem aynanın önüne yerleştirilmiştir. Akvaryumun yarıçapı R , merkezi ile ayna arasındaki uzaklık ise $3R$ 'dir. Başlangıçta aynaya en yakın noktada bulunan küçük bir balık, akvaryumun duvarı boyunca v hızıyla hareket etmeye başlar. Bir gözlemci, akvaryumun merkezinden geçen yatay bir doğru boyunca çok büyük bir uzaklıktan balığa bakmaktadır.

Gözlemcinin gördüğü iki balık görüntüsü birbirinden hangi v_{rel} bağıl hızıyla uzaklaşır? Cevabınızı v cinsinden ifade ediniz. Şunları varsayınız:

- Akvaryumun duvarı çok ince camdan yapılmıştır.
- Suyun kırılma indisi $n = 4/3$ 'tür.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- 4. Başlangıçtaki bağıl hız

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

Doğrudan görülen görüntü $2v$ hızıyla hareket ederken, yansıma yoluyla görülen görüntü ters yönde $2v/3$ hızıyla hareket eder.

Çözüm

4. Bakış eksenini, gözlemciden aynaya doğru yönelen x eksenini olarak alalım. Akvaryumun merkezini $x = 0$, aynayı $x = 3R$ ve balığın başlangıç konumunu $x = R$ olarak belirleyelim.

Enine y yönünü balığın başlangıçtaki hareketi yönünde seçelim. Balık küresel duvara teğet olarak hareket ettiğinden, zamanda birinci mertebeye kadar yer değiştirmesi

$$y = vt,$$

olurken, eksen doğrultusundaki yer değiştirmesi ikinci mertebededir. Bu nedenle, **başlangıçtaki** görüntü hızlarını hesaplarken eksen doğrultusundaki koordinatını R olarak tutabiliriz.

İnce cam ihmal edilebilir: neredeyse çakışan iki yüzeyindeki kırılmalar, doğrudan su ile hava arasındaki kırılmaya eşdeğerdir. Eksen çevresindeki başlangıç hareketi için yeterli olan paraksiyal Snell yasasını kullanacağız.

Işığın tersinirliği ilkesinden yararlanarak, ışınları uzaktaki gözlemciden balığa doğru geriye izleyelim. Gerekli duyarlılık düzeyinde, bu ışınlar başlangıçta eksene paralel ilerler. Gözlemciye bakan $x = -R$ yüzeyindeki h yükseklikleri, görüntünün görünen enine konumunu verir.

Bu yüzeyde, suyun içine doğru yönelen normal, eksenle küçük bir $-h/R$ açısı yapar. Kırılan ışın α açısını yapıyorsa, Snell yasası

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right)$$

bağıntısını verir. Dolayısıyla,

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

Işın akvaryumu geçtikten sonra, aynaya bakan $x = R$ yüzeyindeki yüksekliği

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}$$

olur.

Doğrudan görülen görüntü. Doğrudan izlenen yol için, geriye doğru izlenen ışın bu yüzeyde balığa ulaşır; dolayısıyla $k = y$ olur. Böylece

$$h_d = 2y, \quad \dot{h}_d = 2v.$$

Yansıma yoluyla görülen görüntü. Bu yol için, geriye doğru izlenen ışın aynaya bakan yüzeyden geçerek aynaya doğru ilerlemeyi sürdürür. Dışa yönelen yüzey normali, eksenle k/R açısı yapar. Işının havadaki açısı γ ise, Snell yasası

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}$$

bağıntısını verir. $n = 4/3$, $\alpha = -h/(4R)$ ve $k = h/2$ kullanılarak,

$$\gamma = n\alpha - (n - 1) \frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

Balığın yerine aynadaki görüntüsünü koyarak düzlem aynadaki yansımayı açılmış bir ışın yolu olarak ele alabiliriz. Bu görüntünün eksen doğrultusundaki koordinatı

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

olurken, enine koordinatı y olarak kalır. Balık duvarda bulunduğundan, ışının sonunda ona ulaştığı yerdeki kırılma, ek bir yayılma mesafesi oluşturmaz.

Açılmış ışın, akvaryumun aynaya bakan yüzeyinden aynadaki bu konuma kadar eksen doğrultusunda $4R$ uzaklık kat eder. Bu nedenle

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

Böylece yansıyan görüntünün görünen enine konumu ve hızı

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}$$

olur.

İki görüntü enine doğrultuda zıt yönlerde hareket eder. Bu nedenle başlangıçtaki bağıl hızları

$$\boxed{v_{\text{rel}} = |\dot{h}_d - \dot{h}_r| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}$$

olur.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.