

IPhO 1971

Теоретические задачи и решения · София, Болгария · 4 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1971/

Задача 1: Два бруска на треугольной призме на плоскости без трения

Треугольная призма массой M установлена одной гранью на горизонтальную плоскость без трения, как показано на рис. 1. Две другие грани наклонены к плоскости под углами α_1 и α_2 соответственно. Два бруска массами m_1 и m_2 , соединённые нерастяжимой нитью, могут скользить без трения по поверхности призмы. Масса блока, через который перекинута нить, пренебрежимо мала.

- Выразите ускорение a брусков относительно призмы через ускорение a_0 призмы.
- Найдите ускорение a_0 призмы через заданные величины и ускорение свободного падения g .
- При каком отношении m_1/m_2 призма будет находиться в равновесии?

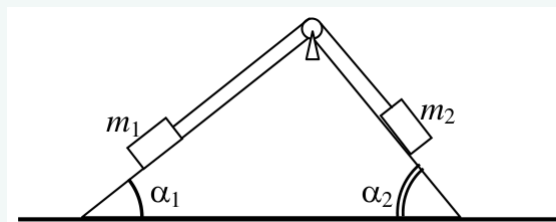


Рис. 1

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В исходном тексте приведены три нумерованных пункта без указания баллов; ниже они обозначены **(1)–(3)**.

Будем считать a_0 положительным при направлении вправо, а a — положительным, когда относительно призмы брусок m_1 ускоряется вниз по своей грани, а брусок m_2 — вверх по своей грани.

$$1. \quad a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

$$2. \quad a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$$

3.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

Решение

Используем обычную модель идеальной нити: нить невесома и натянута, а блок вращается без трения и обладает пренебрежимо малой инерцией. Следовательно, сила натяжения T одинакова по обе стороны блока. Призма движется поступательно по горизонтали, а бруски остаются в контакте со своими гранями.

Поскольку нить нерастяжима, а блок закреплён на призме, проекции относительных ускорений брусков на направления вниз по левой грани и вверх по правой грани равны с учётом знака.

(1) Относительное ускорение через a_0

Рассмотрим движение в инерциальной системе отсчёта, связанной с горизонтальной плоскостью. Абсолютное ускорение каждого бруска равно сумме ускорения призмы и ускорения бруска относительно призмы.

Для m_1 выберем положительное направление вниз по наклонной грани. Проекция направленного вправо ускорения призмы на это направление равна $-a_0 \cos \alpha_1$. Поэтому второй закон Ньютона в проекции на наклонную грань даёт

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

Для m_2 выберем положительное направление вверх по наклонной грани. Соответствующее уравнение имеет вид

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

Силы нормальной реакции не имеют составляющих вдоль наклонных граней. Складывая уравнения, исключаем T :

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

Деление на $m_1 + m_2$ даёт ответ (1).

(2) Ускорение призмы

На систему в целом не действует внешняя горизонтальная сила: силы тяжести и сила нормальной реакции опорной плоскости направлены вертикально. Поэтому горизонтальная составляющая импульса системы сохраняется, а значит, горизонтальное ускорение её центра масс равно нулю.

При положительном a ускорения обоих брусков относительно призмы имеют составляющие, направленные влево. Их абсолютные горизонтальные ускорения равны

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

Следовательно,

$$Ma_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

или

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

Для краткости введём обозначения

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

Два уравнения принимают вид

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

Исключая a , получаем

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

откуда следует ответ (2).

Для показанных на рисунке наклонных граней $0 < C < S$, поэтому

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

Следовательно, призма ускоряется вправо, если $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$, и влево, если неравенство имеет противоположный знак.

(3) Условие равновесия призмы

Для равновесия необходимо $a_0 = 0$. Поскольку $C > 0$, из закона сохранения горизонтальной составляющей импульса тогда также следует $a = 0$. Уравнения движения вдоль наклонных граней сводятся к

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

Таким образом,

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}}.$$

При таком отношении масс призма, первоначально находившаяся в покое, остаётся в покое.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 2: Водород в трубке, запертой столбом ртути

Вертикальная стеклянная трубка площадью поперечного сечения $S = 1.0 \text{ см}^2$ содержит неизвестное количество водорода. Верхний конец трубки закрыт. Другой конец открыт и погружён в сосуд, наполненный ртутью. Трубка и сосуд помещены в герметичную камеру, содержащую воздух при температуре $T_0 = 273 \text{ К}$ и давлении $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Па}$. При этих условиях высота столба ртути в трубке над уровнем ртути в сосуде составляет $h_0 = 0.70 \text{ м}$.

Одна из стенок камеры представляет собой поршень, при перемещении которого воздух изотермически расширяется до давления $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Па}$. В результате высота столба ртути в трубке уменьшается до $h_1 = 0.40 \text{ м}$. Затем камеру нагревают при постоянном объёме до некоторой температуры T_2 , пока столб ртути не поднимется до высоты $h_2 = 0.50 \text{ м}$. Наконец, воздух в камере расширяется при постоянном давлении, и уровень ртути в трубке устанавливается на высоте $h_3 = 0.45 \text{ м}$ над уровнем ртути в сосуде.

Считая, что на протяжении всех процессов система находится в механическом и тепловом равновесии, вычислите массу m водорода, промежуточную температуру T_2 и давление P в конечном состоянии.

Плотность ртути при температуре T_0 равна $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, коэффициент объёмного расширения ртути $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$, а универсальная газовая постоянная $R = 8.314 \text{ J/(mol} \times \text{K)}$. Тепловое расширение стеклянной трубки и изменения уровня ртути в сосуде не учитываются.

Указание. Если ΔT — интервал изменения температуры системы, то $\beta \Delta T = x \ll 1$. В этом случае можно использовать приближение:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

В задаче 2 нет пронумерованных подпунктов. В порядке, указанном в условии:

- **Масса водорода:** $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$.
- **Промежуточная температура:** $T_2 \approx 358 \text{ K}$.
- **Давление водорода в конечном состоянии:** $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$. Давление воздуха в камере в конечном состоянии равно $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$; в условии не уточнено, означает ли «давление P в конечном состоянии» давление водорода или давление воздуха в камере, поэтому приведены оба значения.

Решение

Будем считать водород и воздух идеальными газами и пренебрежём гидростатическими изменениями давления в газах. Используем стандартные значения

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

Обозначим через H высоту закрытого конца трубки над поверхностью ртути в сосуде. Поскольку расширением стекла и изменениями уровня ртути в сосуде пренебрегают, H постоянно. В состоянии i объём водорода равен

$$V_i = S(H - h_i).$$

Обозначим через P_i давление воздуха в камере, а через p_i — давление водорода. Из условия гидростатического равновесия ртути в сообщающихся трубке и сосуде следует

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

Тепловое равновесие означает, что в каждом состоянии оба газа и ртуть имеют одинаковую температуру.

Масса водорода m .

Первое расширение происходит изотермически при температуре T_0 , поэтому плотность ртути остаётся равной ρ_0 . Следовательно,

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa}, \\ p_1 &= P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

Для неизменного количества водорода выполняется закон Бойля — Мариотта:

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

Отсюда

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m.}$$

Подставляя $S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, получаем количество вещества водорода

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Следовательно,

$$m = nM_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg.}$$

Для дальнейших вычислений введём постоянную

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

Тогда уравнение состояния идеального газа для водорода принимает вид

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

Промежуточная температура T_2 .

Объёмное расширение ртути определяет зависимость её плотности от температуры:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

где в последнем выражении использовано приведённое в условии приближение первого порядка.

При нагревании с постоянным объёмом для воздуха в камере выполняется соотношение

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

Объединяя его с условием гидростатического равновесия и уравнением состояния водорода при высоте h_2 , получаем

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

Собирая члены, содержащие T_2 , получаем

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

Отсюда

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K,}$$

так что

$$T_2 \approx 358 \text{ K.}$$

Давление воздуха в камере на этом этапе равно

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Давление в конечном состоянии.

Последнее расширение происходит при постоянном давлении воздуха в камере. Следовательно,

$$P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Чтобы определить давление водорода, необходимо также найти его конечную температуру T_3 .

При $h_3 = 0.45 \text{ m}$

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

Перегруппировав члены, получаем

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

Таким образом,

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K.}$$

Следовательно, давление водорода в конечном состоянии равно

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa,}$$

или

$$P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

Наконец, параметры расширения равны

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

Оба значения малы, что согласуется с приближением, предложенным в указании.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.

Задача 3: Электрическая цепь в форме куба из батарей, конденсаторов и резисторов

Четыре батареи с ЭДС $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$ и $E_4 = 16 \text{ V}$, четыре конденсатора одинаковой ёмкости $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ и четыре резистора одинакового сопротивления соединены в цепь, показанную на рис. 3. Внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

- Вычислите полную энергию W , накопленную в конденсаторах после установления стационарного режима в системе.
- Точки Н и В замыкают накоротко. Найдите заряд конденсатора C_2 в новом стационарном режиме.

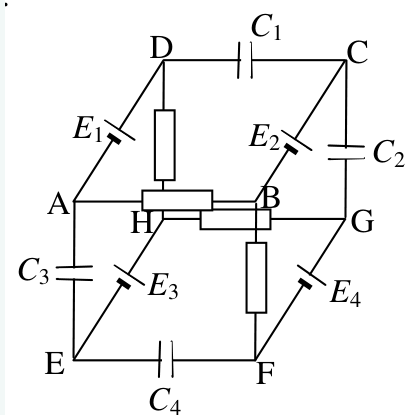


Рис. 3

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Два нумерованных пункта ниже обозначены как (1) и (2).

1. Полная накопленная энергия: $W = 26 \mu\text{J}$.
2. Заряд конденсатора C_2 после замыкания H и B накоротко: $Q_2 = 0 \text{ C}$.

Решение

Пусть сопротивление каждого резистора равно R . Резисторы расположены на рёбрах AB , BF , DH и HG ; пересечения линий на проекции не образуют дополнительных узлов.

Длинные штрихи в обозначениях батарей указывают на положительные полюсы, поэтому

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

В стационарном режиме напряжения на конденсаторах постоянны, и ток через конденсаторы не течёт.

(1) Полная накопленная энергия

При разомкнутых ветвях с конденсаторами единственный замкнутый контур, по которому может течь ток, имеет вид

$$F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F.$$

В стационарном режиме ток в ветвях, содержащих E_2 и E_3 , отсутствует.

Второе правило Кирхгофа для контура с током даёт

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0.$$

Таким образом, падение напряжения на каждом резисторе равно

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Принимая $V_F = 0$ и учитывая повышение потенциала на батарее и последующие падения напряжения, получаем

$$V_G = 16 \text{ V}, \quad V_H = 13 \text{ V}, \quad V_D = 10 \text{ V}, \\ V_A = 6 \text{ V}, \quad V_B = 3 \text{ V}.$$

Остальные батареи задают потенциалы

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}.$$

Следовательно, напряжения на конденсаторах равны:

Конденсатор	Модуль напряжения	Положительная обкладка
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

Используя выражение для электростатической энергии $W_i = \frac{1}{2} C_i U_i^2$, получаем

$$W = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6} \text{ F}) (1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2) \text{ V}^2.$$

Следовательно,

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \text{ } \mu\text{J}.$$

(2) Заряд C_2 после замыкания H и B накоротко

Замыкание накоротко приводит к равенству $V_H = V_B$. Примем их общий потенциал за нуль:

$$V_H = V_B = 0.$$

Тогда батарея E_2 задаёт потенциал

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}.$$

В новом стационарном режиме ток через конденсаторы снова отсутствует. Батарея E_4 создаёт ток в контуре, проходящем через два одинаковых резистора GH и BF , поэтому

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

Следовательно, потенциал G относительно H равен

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}.$$

Таким образом, $V_G = V_C$, и напряжение на C_2 обращается в нуль:

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

Следовательно, его конечный заряд равен

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 4: Рыбка в сферическом аквариуме перед плоским зеркалом

Сферический аквариум, наполненный водой, расположен перед плоским вертикальным зеркалом. Радиус аквариума равен R , а расстояние от его центра до зеркала — $3R$. Маленькая рыбка, первоначально находящаяся в ближайшей к зеркалу точке, начинает двигаться со скоростью v вдоль стенки. Наблюдатель смотрит на рыбку с очень большого расстояния вдоль горизонтальной прямой, проходящей через центр аквариума.

С какой относительной скоростью v_{rel} будут удаляться друг от друга два изображения рыбки, видимые наблюдателем? Выразите ответ через v . Примите следующие допущения:

- Стенка аквариума изготовлена из очень тонкого стекла.
- Показатель преломления воды равен $n = 4/3$.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- 4. Начальная относительная скорость равна

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

Изображение, наблюдаемое непосредственно, движется со скоростью $2v$, а изображение, наблюдаемое после отражения, движется в противоположном направлении со скоростью $2v/3$.

Решение

4. Выберем ось наблюдения в качестве оси x , направленной от наблюдателя к зеркалу. Поместим центр аквариума в точку $x = 0$, зеркало — в точку $x = 3R$, а рыбку в начальный момент — в точку $x = R$.

Выберем поперечное направление y вдоль начального движения рыбки. Поскольку рыбка движется по касательной к сферической стенке, её смещение в первом порядке по времени равно

$$y = vt,$$

тогда как её смещение вдоль оси имеет второй порядок. Поэтому при вычислении **начальных** скоростей изображений можно считать её осевую координату равной R .

Влиянием тонкого стекла можно пренебречь: преломления на двух его почти совпадающих поверхностях в совокупности эквивалентны преломлению непосредственно на границе воды и воздуха. Воспользуемся законом Снеллиуса в параксиальном приближении, которого достаточно для описания начального движения вблизи оси.

В силу обратимости хода световых лучей проследим лучи в обратном направлении — от удалённого наблюдателя к рыбке. С требуемой точностью эти лучи первоначально идут параллельно оси. Их высота h на обращённой к наблюдателю поверхности, $x = -R$, задаёт видимое поперечное положение изображения.

На этой поверхности нормаль, направленная внутрь воды, составляет с осью малый угол $-h/R$. Если преломлённый луч составляет с осью угол α , то закон Снеллиуса даёт

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right).$$

Следовательно,

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

После прохождения через аквариум высота луча на обращённой к зеркалу поверхности, $x = R$, равна

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}.$$

Изображение, наблюдаемое непосредственно. При непосредственном наблюдении луч, прослеживаемый в обратном направлении, достигает рыбки на этой поверхности, поэтому $k = y$. Следовательно,

$$h_d = 2y, \quad \boxed{\dot{h}_d = 2v}.$$

Изображение, наблюдаемое после отражения. В этом случае луч, прослеживаемый в обратном направлении, проходит через обращённую к зеркалу поверхность и продолжает движение к зеркалу. Внешняя нормаль к поверхности составляет с осью угол k/R . Если угол луча в воздухе равен γ , то закон Снеллиуса даёт

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}.$$

Подставляя $n = 4/3$, $\alpha = -h/(4R)$ и $k = h/2$, получаем

$$\gamma = n\alpha - (n-1) \frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

Отражение от плоского зеркала можно заменить прямолинейным продолжением луча, заменив рыбку её зеркальным изображением. Его осевая координата равна

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

а поперечная координата остаётся равной y . Поскольку рыбка находится у стенки, преломление в точке, где луч в конце своего пути достигает рыбки, не добавляет к его пути никакого расстояния.

В такой развёрнутой схеме луч проходит вдоль оси расстояние $4R$ от обращённой к зеркалу поверхности аквариума до этого зеркального изображения. Поэтому

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

Таким образом, видимые поперечное положение и скорость отражённого изображения равны

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}.$$

Два изображения движутся в противоположных поперечных направлениях. Поэтому их начальная относительная скорость равна

$$\boxed{v_{\text{rel}} = \left| \dot{h}_d - \dot{h}_r \right| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}.$$

Решение проверено по официальному решению.