

IPhO 1971

Problemas teóricos y soluciones · Sofía, Bulgaria · 4 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1971/

Problema 1: Dos bloques sobre un prisma triangular en un plano sin rozamiento

Un prisma triangular de masa M está apoyado sobre una de sus caras en un plano horizontal sin rozamiento, como se muestra en la Fig. 1. Las otras dos caras están inclinadas respecto al plano formando ángulos α_1 y α_2 , respectivamente. Dos bloques de masas m_1 y m_2 , unidos por un hilo inextensible, pueden deslizarse sin rozamiento sobre la superficie del prisma. La masa de la polea por la que pasa el hilo es despreciable.

- Exprese la aceleración a de los bloques respecto al prisma en función de la aceleración a_0 del prisma.
- Determine la aceleración a_0 del prisma en función de las magnitudes dadas y de la aceleración g de la gravedad.
- ¿Para qué cociente m_1/m_2 estará el prisma en equilibrio?

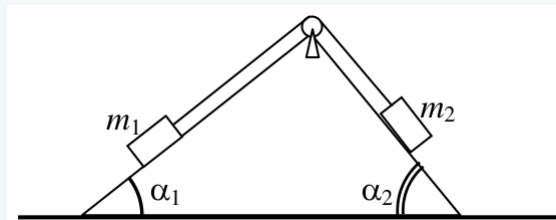


Fig. 1

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

El texto original contiene tres puntos sin numerar y no indica ninguna puntuación; a continuación se etiquetan como **(1)–(3)**.

Se toma a_0 como positiva hacia la derecha, y a como positiva cuando m_1 acelera hacia abajo por su cara y m_2 acelera hacia arriba por la suya, respecto al prisma.

$$1. \quad a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

$$2. \quad a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$$

3.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

Solución

Utilizamos la aproximación habitual de hilo ideal: el hilo carece de masa y está tenso, y la polea gira sin rozamiento y tiene una inercia despreciable. En consecuencia, la tensión T es la misma a ambos lados. El prisma se traslada horizontalmente y los bloques permanecen en contacto con sus respectivas caras.

Como el hilo es inextensible y la polea está fija al prisma, los bloques tienen aceleraciones relativas iguales, incluido el signo, cuando se miden hacia abajo por la cara izquierda y hacia arriba por la cara derecha.

(1) Aceleración relativa en función de a_0

Trabajamos en el sistema de referencia inercial del plano horizontal. La aceleración absoluta de cada bloque es igual a la aceleración del prisma más su aceleración relativa al prisma.

Para m_1 , tomamos como sentido positivo el descendente a lo largo de su cara inclinada. La proyección de la aceleración del prisma hacia la derecha sobre este sentido es $-a_0 \cos \alpha_1$. Por tanto, la segunda ley de Newton a lo largo de la cara inclinada da

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

Para m_2 , tomamos como sentido positivo el ascendente a lo largo de su cara inclinada. La ecuación correspondiente es

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

Las fuerzas normales no tienen componentes a lo largo de las caras inclinadas. Al sumar las ecuaciones se elimina T :

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

Al dividir por $m_1 + m_2$ se obtiene la respuesta (1).

(2) Aceleración del prisma

No actúa ninguna fuerza externa horizontal sobre el sistema completo: la gravedad y la fuerza normal del plano de apoyo son verticales. Por ello, se conserva su cantidad de movimiento horizontal, de modo que su centro de masas tiene una aceleración horizontal nula.

Para a positiva, ambos bloques aceleran hacia la izquierda respecto al prisma. Sus aceleraciones horizontales absolutas son

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

Por tanto,

$$M a_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

o bien

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

Para abreviar, definimos

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

Las dos ecuaciones se convierten en

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

Al eliminar a ,

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

lo que da la respuesta (2).

Para las caras inclinadas que se muestran, $0 < C < S$, de modo que

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

Por tanto, el prisma acelera hacia la derecha si $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$, y hacia la izquierda si se invierte la desigualdad.

(3) Condición de equilibrio del prisma

El equilibrio exige $a_0 = 0$. Como $C > 0$, la conservación de la cantidad de movimiento horizontal exige entonces también que $a = 0$. Las ecuaciones a lo largo de las caras inclinadas se reducen a

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}}.$$

Con este cociente, un prisma inicialmente en reposo permanece en reposo.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 2: Hidrógeno en un tubo cerrado por una columna de mercurio

Un tubo vertical de vidrio de sección transversal $S = 1.0 \text{ cm}^2$ contiene una cantidad desconocida de hidrógeno. El extremo superior del tubo está cerrado. El otro extremo está abierto y sumergido en una cubeta llena de mercurio. El tubo y la cubeta se encuentran en una cámara hermética que contiene aire a una temperatura $T_0 = 273 \text{ K}$ y una presión $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Pa}$. En estas condiciones, la altura de la columna de mercurio en el tubo por encima del nivel de mercurio en la cubeta es $h_0 = 0.70 \text{ m}$.

Una de las paredes de la cámara es un pistón que expande el aire isotérmicamente hasta una presión de $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$. Como resultado, la altura de la columna de mercurio en el tubo disminuye hasta $h_1 = 0.40 \text{ m}$. A continuación, la cámara se calienta a volumen constante hasta una cierta temperatura T_2 , hasta que la columna de mercurio asciende a $h_2 = 0.50 \text{ m}$. Finalmente, el aire de la cámara se expande a presión constante y el nivel de mercurio en el tubo se estabiliza a $h_3 = 0.45 \text{ m}$ por encima del nivel de mercurio en la cubeta.

Suponiendo que el sistema se encuentra en equilibrio mecánico y térmico durante todos los procesos, calcule la masa m del hidrógeno, la temperatura intermedia T_2 y la presión P en el estado final.

La densidad del mercurio a la temperatura T_0 es $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, el coeficiente de dilatación del mercurio es $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ y la constante de los gases es $R = 8.314 \text{ J/(mol} \times \text{K)}$. No se consideran la dilatación térmica del tubo de vidrio ni las variaciones del nivel de mercurio en la cubeta.

Indicación. Si ΔT es el intervalo de variación de la temperatura del sistema, entonces $\beta \Delta T = x \ll 1$. En ese caso, puede utilizar la aproximación:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

El problema 2 no tiene apartados numerados. En el orden solicitado:

- **Masa del hidrógeno:** $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$.
- **Temperatura intermedia:** $T_2 \approx 358 \text{ K}$.
- **Presión final del hidrógeno:** $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$. La presión final del aire de la cámara es $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$; el enunciado no aclara si «la presión P en el estado final» se refiere a la presión del hidrógeno o a la del aire de la cámara, por lo que se dan ambas.

Solución

Se consideran el hidrógeno y el aire como gases ideales, con variaciones de presión hidrostática despreciables dentro de los gases. Se utilizan los valores habituales

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

Sea H la altura del extremo cerrado del tubo sobre la superficie del mercurio en la cubeta. Puesto que se desprecian la dilatación del vidrio y los cambios de nivel en la cubeta, H es constante. En el estado i , el volumen del hidrógeno es

$$V_i = S(H - h_i).$$

Se denota por P_i la presión del aire de la cámara y por p_i la presión del hidrógeno. El equilibrio hidrostático del mercurio que comunica el tubo con la cubeta da

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

El equilibrio térmico implica que ambos gases y el mercurio tienen la misma temperatura en cada estado.

Masa del hidrógeno m .

La primera expansión es isotérmica a T_0 , por lo que la densidad del mercurio sigue siendo ρ_0 . Por tanto,

$$\begin{aligned} p_0 &= P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa}, \\ p_1 &= P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}. \end{aligned}$$

La cantidad fija de hidrógeno obedece la ley de Boyle:

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

En consecuencia,

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m.}$$

Utilizando $S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, la cantidad de hidrógeno es

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Por tanto,

$$m = nM_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg.}$$

Para los cálculos restantes, se define la constante

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

La ecuación de los gases ideales para el hidrógeno se convierte entonces en

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

Temperatura intermedia T_2 .

La dilatación volumétrica del mercurio determina su densidad en función de la temperatura:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

donde la última expresión utiliza la aproximación de primer orden proporcionada.

Durante el calentamiento a volumen constante, el aire de la cámara satisface

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

Combinando esta relación con el equilibrio hidrostático y la ley de los gases para el hidrógeno a h_2 ,

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

Agrupando los términos que contienen T_2 , se obtiene

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

Por consiguiente,

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K,}$$

de modo que

$$T_2 \approx 358 \text{ K.}$$

La presión del aire de la cámara en esta etapa es

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Presión en el estado final.

La expansión final tiene lugar a presión constante del aire de la cámara. Por tanto,

$$P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Para determinar la presión del hidrógeno, también debe hallarse su temperatura final T_3 . A $h_3 = 0.45 \text{ m}$,

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

Reordenando,

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

Así,

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K.}$$

La presión final del hidrógeno es, en consecuencia,

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa,}$$

o bien

$$P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

Finalmente, los parámetros de dilatación son

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

Ambos son pequeños, en consonancia con la aproximación solicitada en la indicación.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.

Problema 3: Circuito en forma de cubo de baterías, condensadores y resistencias

Cuatro baterías de fuerza electromotriz $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$ y $E_4 = 16 \text{ V}$, cuatro condensadores con la misma capacidad $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ y cuatro resistencias iguales están conectados en el circuito que se muestra en la Fig. 3. La resistencia interna de las baterías es despreciable.

- Calcule la energía total W acumulada en los condensadores cuando se establece un régimen estacionario en el sistema.
- Los puntos H y B se conectan en cortocircuito. Determine la carga del condensador C_2 en el nuevo régimen estacionario.

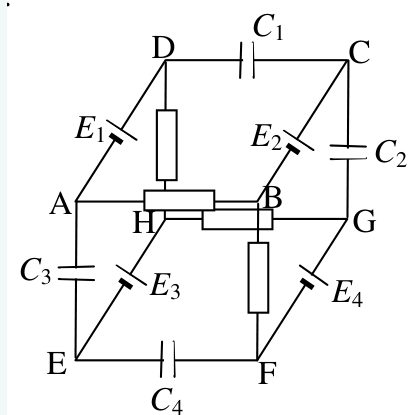


Fig. 3

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Los dos puntos sin numerar se designan a continuación como (1) y (2).

1. Energía total almacenada: $W = 26 \mu\text{J}$.
2. Carga del condensador C_2 tras conectar H y B en cortocircuito: $Q_2 = 0 \text{ C}$.

Solución

Sea R el valor de cada resistencia. Las resistencias ocupan las aristas AB , BF , DH y HG ; los cruces en la proyección no crean nodos adicionales.

Las placas largas de las baterías indican los terminales positivos, por lo que

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

En régimen estacionario, las tensiones de los condensadores son constantes y no circula corriente a través de ellos.

(1) Energía total almacenada

Con las ramas de los condensadores abiertas, la única malla conductora es

$$F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F.$$

Por las ramas que contienen E_2 y E_3 no circula corriente en régimen estacionario.

La ley de tensiones de Kirchhoff aplicada a la malla conductora da

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0.$$

Por tanto, la caída de tensión en cada resistencia es

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Tomando $V_F = 0$, la subida de tensión en la batería y las sucesivas caídas de tensión dan

$$V_G = 16 \text{ V}, \quad V_H = 13 \text{ V}, \quad V_D = 10 \text{ V},$$

$$V_A = 6 \text{ V}, \quad V_B = 3 \text{ V}.$$

Las baterías restantes fijan

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}.$$

En consecuencia, las tensiones de los condensadores son:

Condensador	Valor absoluto de la tensión	Placa positiva
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

Utilizando la energía electrostática $W_i = \frac{1}{2}C_i U_i^2$,

$$W = \frac{1}{2}(1 \times 10^{-6} \text{ F})(1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2)\text{V}^2.$$

Por tanto,

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \mu\text{J}.$$

(2) Carga de C_2 tras conectar H y B en cortocircuito

El cortocircuito hace que $V_H = V_B$. Elegimos su potencial común como cero:

$$V_H = V_B = 0.$$

La batería E_2 fija entonces

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}.$$

En el nuevo régimen estacionario, de nuevo no circula corriente por los condensadores. La batería E_4 hace circular una corriente por una malla que pasa por las dos resistencias iguales GH y BF , por lo que

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

El potencial de G respecto a H es, por tanto,

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}.$$

Así pues, $V_G = V_C$, y la tensión entre los terminales de C_2 se anula:

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

En consecuencia, su carga final es

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 4: Pez en un acuario esférico frente a un espejo plano

Un acuario esférico, lleno de agua, está situado frente a un espejo plano vertical. El radio del acuario es R , y la distancia entre su centro y el espejo es $3R$. Un pequeño pez, que inicialmente se encuentra en el punto más cercano al espejo, comienza a moverse con velocidad v a lo largo de la pared. Un observador mira al pez desde una distancia muy grande a lo largo de una línea horizontal que pasa por el centro del acuario.

¿Cuál es la velocidad relativa v_{rel} con la que se separarán las dos imágenes del pez que ve el observador? Exprese su respuesta en función de v . Suponga que:

- La pared del acuario está hecha de vidrio muy delgado.
- El índice de refracción del agua es $n = 4/3$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 4. La velocidad relativa inicial es

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

La imagen directa se mueve a $2v$, mientras que la imagen vista por reflexión se mueve en sentido contrario a $2v/3$.

Solución

4. Tomemos el eje de observación como eje x , dirigido desde el observador hacia el espejo. Situemos el centro del acuario en $x = 0$, el espejo en $x = 3R$ y el pez inicialmente en $x = R$.

Elijamos la dirección transversal y en el sentido del movimiento inicial del pez. Como el pez se mueve tangencialmente a la pared esférica, su desplazamiento a primer orden en el tiempo es

$$y = vt,$$

mientras que su desplazamiento axial es de segundo orden. Por tanto, podemos mantener su coordenada axial igual a R al calcular las velocidades **iniciales** de las imágenes.

El vidrio delgado puede despreciarse: las refracciones en sus dos superficies casi coincidentes equivalen a una refracción directa entre el agua y el aire. Utilizamos la ley de Snell en la aproximación paraxial, que es suficiente para el movimiento inicial en torno al eje.

Por la reversibilidad de la luz, tracemos los rayos en sentido inverso desde el observador distante hacia el pez. Con la precisión requerida, estos rayos viajan inicialmente paralelos al eje. Su altura h en la superficie orientada hacia el observador, $x = -R$, da la posición transversal aparente de la imagen.

En esta superficie, la normal dirigida hacia el interior del agua forma el pequeño ángulo $-h/R$ con el eje. Si el rayo refractado forma un ángulo α , la ley de Snell da

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right).$$

Por consiguiente,

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

Tras atravesar el acuario, su altura en la superficie orientada hacia el espejo, $x = R$, es

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}.$$

Imagen directa. Para el trayecto directo, el rayo trazado en sentido inverso alcanza al pez en esta superficie, de modo que $k = y$. Por tanto,

$$h_d = 2y, \quad \boxed{\dot{h}_d = 2v}.$$

Imagen vista por reflexión. Para este trayecto, el rayo trazado en sentido inverso continúa a través de la superficie orientada hacia el espejo y se dirige hacia este. La normal exterior a la superficie forma un ángulo k/R con el eje. Si el ángulo del rayo en el aire es γ , la ley de Snell da

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}.$$

Utilizando $n = 4/3$, $\alpha = -h/(4R)$ y $k = h/2$,

$$\gamma = n\alpha - (n-1) \frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

Podemos desplegar el trayecto de la reflexión en el espejo plano sustituyendo el pez por su imagen especular. Su coordenada axial es

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

y su coordenada transversal sigue siendo y . Como el pez se encuentra en la pared, la refracción en el punto donde el rayo finalmente lo alcanza no introduce ninguna distancia de propagación adicional.

El rayo del trayecto desplegado recorre una distancia axial $4R$ desde la superficie del acuario orientada hacia el espejo hasta esta posición especular. Por tanto,

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

Así, la imagen reflejada tiene la siguiente posición transversal aparente y velocidad:

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}.$$

Las dos imágenes se mueven en sentidos transversales opuestos. Su velocidad relativa inicial es, por tanto,

$$\boxed{v_{\text{rel}} = \left| \dot{h}_d - \dot{h}_r \right| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.