

IPhO 1971

Theorieaufgaben und Lösungen · Sofia, Bulgarien · 4 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1971/

Aufgabe 1: Zwei Blöcke auf einem dreieckigen Prisma auf einer reibungsfreien Ebene

Ein dreieckiges Prisma der Masse M liegt mit einer Seitenfläche auf einer reibungsfreien horizontalen Ebene, wie in Abb. 1 gezeigt. Die beiden anderen Seitenflächen sind gegenüber der Ebene unter den Winkeln α_1 bzw. α_2 geneigt. Zwei Blöcke der Massen m_1 und m_2 , die durch einen undehnbaren Faden verbunden sind, können reibungsfrei auf der Oberfläche des Prismas gleiten. Die Masse der Rolle, über die der Faden läuft, ist vernachlässigbar.

- Drücken Sie die Beschleunigung a der Blöcke relativ zum Prisma durch die Beschleunigung a_0 des Prismas aus.
- Bestimmen Sie die Beschleunigung a_0 des Prismas in Abhängigkeit von den gegebenen Größen und der Erdbeschleunigung g .
- Bei welchem Verhältnis m_1/m_2 befindet sich das Prisma im Gleichgewicht?

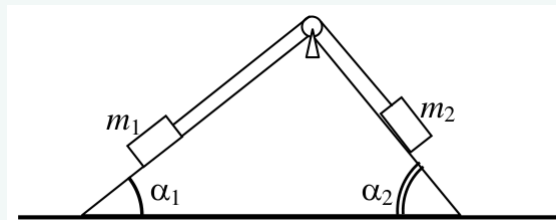


Abb. 1

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die Quelle enthält drei unnummerierte Aufzählungspunkte und gibt keine Punktzahlen an; im Folgenden werden sie mit **(1)–(3)** bezeichnet.

Wir wählen a_0 nach rechts positiv und a positiv, wenn m_1 relativ zum Prisma seine Seitenfläche hinab und m_2 seine Seitenfläche hinauf beschleunigt.

$$1. \quad a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2}$$

$$2. \quad a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2}$$

3.

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}$$

Lösung

Wir verwenden die übliche Näherung eines idealen Fadens: Der Faden ist masselos und gespannt, und die Rolle dreht sich reibungsfrei und hat ein vernachlässigbares Trägheitsmoment. Daher ist die Fadenspannung T auf beiden Seiten gleich. Das Prisma bewegt sich translatorisch in horizontaler Richtung, und die Blöcke bleiben in Kontakt mit ihren Seitenflächen.

Da der Faden undehnbar und die Rolle am Prisma befestigt ist, haben die Blöcke gleiche vorzeichenbehaftete Relativbeschleunigungen, wenn diese entlang der linken Seitenfläche abwärts und entlang der rechten Seitenfläche aufwärts gemessen werden.

(1) Relativbeschleunigung in Abhängigkeit von a_0

Wir betrachten das Inertialsystem der horizontalen Ebene. Die absolute Beschleunigung jedes Blocks ist gleich der Beschleunigung des Prismas zuzüglich seiner Beschleunigung relativ zum Prisma.

Für m_1 wählen wir die positive Richtung entlang seiner schiefen Ebene abwärts. Die Projektion der nach rechts gerichteten Beschleunigung des Prismas auf diese Richtung ist $-a_0 \cos \alpha_1$. Das zweite Newtonsche Gesetz entlang der schiefen Ebene ergibt daher

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

Für m_2 wählen wir die positive Richtung entlang seiner schiefen Ebene aufwärts. Die entsprechende Gleichung lautet

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

Die Normalkräfte haben keine Komponenten entlang der schiefen Ebenen. Durch Addition der Gleichungen wird T eliminiert:

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

Division durch $m_1 + m_2$ liefert Antwort (1).

(2) Beschleunigung des Prismas

Auf das Gesamtsystem wirkt keine äußere horizontale Kraft: Die Schwerkraft und die Normalkraft der tragenden Ebene sind vertikal gerichtet. Daher bleibt sein horizontaler Impuls erhalten, sodass die horizontale Beschleunigung seines Schwerpunkts null ist.

Für positives a beschleunigen beide Blöcke relativ zum Prisma nach links. Ihre absoluten horizontalen Beschleunigungen sind

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

Somit gilt

$$M a_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

oder

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

Zur Abkürzung definieren wir

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

Die beiden Gleichungen lauten dann

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

Durch Eliminieren von a erhalten wir

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

woraus Antwort (2) folgt.

Für die dargestellten geneigten Seitenflächen gilt $0 < C < S$, also

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

Daher beschleunigt das Prisma nach rechts, wenn $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$, und nach links, wenn die umgekehrte Ungleichung gilt.

(3) Bedingung für das Gleichgewicht des Prismas

Gleichgewicht erfordert $a_0 = 0$. Da $C > 0$, erfordert die Erhaltung des horizontalen Impulses dann auch $a = 0$. Die Gleichungen entlang der schiefen Ebenen vereinfachen sich zu

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

Folglich gilt

$$\boxed{\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}}.$$

Bei diesem Verhältnis bleibt ein anfangs ruhendes Prisma in Ruhe.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 2: Wasserstoff in einem durch eine Quecksilbersäule verschlossenen Rohr

Ein senkrechtes Glasrohr mit dem Querschnitt $S = 1.0 \text{ cm}^2$ enthält eine unbekannte Menge Wasserstoff. Das obere Ende des Rohrs ist verschlossen. Das andere Ende ist offen und taucht in eine mit Quecksilber gefüllte Wanne ein. Das Rohr und die Wanne befinden sich in einer abgeschlossenen Kammer, die Luft bei der Temperatur $T_0 = 273 \text{ K}$ und dem Druck $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Pa}$ enthält. Unter diesen Bedingungen beträgt die Höhe der Quecksilbersäule im Rohr über dem Quecksilberspiegel in der Wanne $h_0 = 0.70 \text{ m}$.

Eine der Wände der Kammer ist ein Kolben, durch dessen Bewegung die Luft isotherm bis auf einen Druck von $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$ expandiert. Dadurch sinkt die Höhe der Quecksilbersäule im Rohr auf $h_1 = 0.40 \text{ m}$. Anschließend wird die Kammer bei konstantem Volumen auf eine Temperatur T_2 erwärmt, bis die Quecksilbersäule auf $h_2 = 0.50 \text{ m}$ steigt. Schließlich wird die Luft in der Kammer bei konstantem Druck expandiert, und der Quecksilberspiegel im Rohr stellt sich auf eine Höhe von $h_3 = 0.45 \text{ m}$ über dem Quecksilberspiegel in der Wanne ein.

Berechnen Sie unter der Voraussetzung, dass sich das System während aller Vorgänge im mechanischen und thermischen Gleichgewicht befindet, die Masse m des Wasserstoffs, die Zwischentemperatur T_2 und den Druck P im Endzustand.

Die Dichte von Quecksilber bei der Temperatur T_0 beträgt $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$, der Volumenausdehnungskoeffizient von Quecksilber $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ und die Gaskonstante $R = 8.314 \text{ J/(mol} \times \text{K)}$. Die Wärmeausdehnung des Glasrohrs und die Änderungen des Quecksilberspiegels in der Wanne werden nicht berücksichtigt.

Hinweis. Ist ΔT die Temperaturänderung des Systems, so gilt $\beta \Delta T = x \ll 1$. In diesem Fall können Sie die folgende Näherung verwenden:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1 - x.$$

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Aufgabe 2 hat keine nummerierten Teilaufgaben. In der geforderten Reihenfolge:

- **Wasserstoffmasse:** $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$.
- **Zwischentemperatur:** $T_2 \approx 358 \text{ K}$.
- **Wasserstoffdruck im Endzustand:** $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$. Der Luftdruck in der Kammer im Endzustand beträgt $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$; die Aufgabenstellung lässt offen, ob „der Druck P im Endzustand“ den Wasserstoffdruck oder den Luftdruck in der Kammer meint, daher werden beide angegeben.

Lösung

Wasserstoff und Luft werden als ideale Gase behandelt; hydrostatische Druckunterschiede innerhalb der Gase werden vernachlässigt. Verwenden Sie die üblichen Werte

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

Es sei H die Höhe des geschlossenen Rohrendes über der Quecksilberoberfläche in der Wanne. Da die Glasausdehnung und Änderungen des Flüssigkeitsspiegels in der Wanne vernachlässigt werden, ist H konstant. Im Zustand i beträgt das Wasserstoffvolumen

$$V_i = S(H - h_i).$$

Mit P_i wird der Luftdruck in der Kammer und mit p_i der Wasserstoffdruck bezeichnet. Aus dem hydrostatischen Gleichgewicht im zusammenhängenden Quecksilber ergibt sich

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

Thermisches Gleichgewicht bedeutet, dass beide Gase und das Quecksilber in jedem Zustand dieselbe Temperatur haben.

Wasserstoffmasse m .

Die erste Expansion erfolgt isotherm bei T_0 , sodass die Quecksilberdichte gleich ρ_0 bleibt. Somit gilt

$$p_0 = P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa},$$

$$p_1 = P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

Die konstante Wasserstoffmenge gehorcht dem Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

Folglich ist

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m.}$$

Mit $S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ergibt sich für die Stoffmenge des Wasserstoffs

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol.}$$

Daher gilt

$$m = nM_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg.}$$

Für die weiteren Berechnungen wird die folgende Konstante definiert:

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

Die ideale Gasgleichung für den Wasserstoff lautet dann

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

Zwischentemperatur T_2 .

Aus der Volumenausdehnung des Quecksilbers ergibt sich seine temperaturabhängige Dichte:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

wobei im letzten Ausdruck die angegebene Näherung erster Ordnung verwendet wird.

Während der Erwärmung bei konstantem Volumen gilt für die Luft in der Kammer

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

Die Kombination dieser Beziehung mit dem hydrostatischen Gleichgewicht und der Gasgleichung für den Wasserstoff bei h_2 ergibt

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

Fasst man die Terme zusammen, die T_2 enthalten, erhält man

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

Daraus folgt

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K,}$$

also

$$T_2 \approx 358 \text{ K.}$$

Der Luftdruck in der Kammer beträgt in diesem Zustand

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Druck im Endzustand.

Die abschließende Expansion erfolgt bei konstantem Luftdruck in der Kammer. Daher gilt

$$P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Um den Wasserstoffdruck zu bestimmen, muss auch die Endtemperatur T_3 ermittelt werden. Bei $h_3 = 0.45 \text{ m}$ gilt

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

Somit ist

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K.}$$

Der Wasserstoffdruck im Endzustand beträgt folglich

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa,}$$

oder

$$P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa.}$$

Schließlich betragen die Ausdehnungsparameter

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

Beide sind klein, was mit der im Hinweis geforderten Näherung vereinbar ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.

Aufgabe 3: Würfelförmige Schaltung aus Batterien, Kondensatoren und Widerständen

Vier Batterien mit den elektromotorischen Kräften $E_1 = 4 \text{ V}$, $E_2 = 8 \text{ V}$, $E_3 = 12 \text{ V}$ und $E_4 = 16 \text{ V}$, vier Kondensatoren mit derselben Kapazität $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ und vier gleiche Widerstände sind in der in Abb. 3 dargestellten Schaltung verbunden. Der Innenwiderstand der Batterien ist vernachlässigbar.

- Berechnen Sie die gesamte in den Kondensatoren gespeicherte Energie W , wenn sich ein stationärer Zustand des Systems eingestellt hat.
- Die Punkte H und B werden kurzgeschlossen. Bestimmen Sie die Ladung auf dem Kondensator C_2 im neuen stationären Zustand.

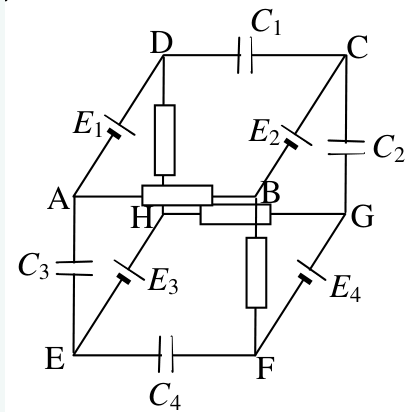


Abb. 3

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Die beiden nicht nummerierten Aufzählungspunkte werden im Folgenden mit (1) und (2) bezeichnet.

1. Insgesamt gespeicherte Energie: $W = 26 \mu\text{J}$.

2. Ladung auf dem Kondensator C_2 nach dem Kurzschließen von H und B: $Q_2 = 0 \text{ C}$.

Lösung

Jeder Widerstand habe den Widerstandswert R . Die Widerstände liegen auf den Kanten AB , BF , DH und HG ; Kreuzungen in der Projektion bilden keine zusätzlichen Knotenpunkte.

Die langen Striche der Batteriesymbole kennzeichnen die positiven Pole, also gilt

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

Im stationären Zustand sind die Kondensatorspannungen konstant, und durch die Kondensatoren fließt kein Strom.

(1) Insgesamt gespeicherte Energie

Bei offenen Kondensatorzweigen ist die einzige stromführende Masche

$$F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F.$$

In den Zweigen mit E_2 und E_3 fließt im stationären Zustand kein Strom.

Die Kirchhoffsche Maschenregel liefert für die stromführende Masche

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0.$$

Damit beträgt der Spannungsabfall an jedem Widerstand

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

Mit $V_F = 0$ ergeben sich aus der Spannungserhöhung an der Batterie und den aufeinanderfolgenden Spannungsabfällen

$$V_G = 16 \text{ V}, \quad V_H = 13 \text{ V}, \quad V_D = 10 \text{ V}, \\ V_A = 6 \text{ V}, \quad V_B = 3 \text{ V}.$$

Die übrigen Batterien legen fest:

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}.$$

Somit ergeben sich folgende Kondensatorspannungen:

Kondensator	Betrag der Spannung	Positive Platte
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

Mit der elektrostatischen Energie $W_i = \frac{1}{2} C_i U_i^2$ folgt

$$W = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6} \text{ F}) (1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2) \text{ V}^2.$$

Damit gilt

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \mu\text{J}.$$

(2) Ladung auf C_2 nach dem Kurzschließen von H und B

Durch den Kurzschluss gilt $V_H = V_B$. Wir wählen ihr gemeinsames Potential als null:

$$V_H = V_B = 0.$$

Die Batterie E_2 legt dann fest:

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}.$$

Im neuen stationären Zustand fließt erneut kein Strom durch die Kondensatoren. Die Batterie E_4 treibt einen Strom in einer Masche durch die beiden gleichen Widerstände GH und BF , sodass

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

Das Potential von G gegenüber H beträgt daher

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}.$$

Somit gilt $V_G = V_C$, und die Spannung an C_2 verschwindet:

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

Seine endgültige Ladung ist folglich

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 4: Fisch in einem kugelförmigen Aquarium vor einem ebenen Spiegel

Ein mit Wasser gefülltes kugelförmiges Aquarium steht vor einem ebenen, senkrechten Spiegel. Der Radius des Aquariums beträgt R , und der Abstand zwischen seinem Mittelpunkt und dem Spiegel beträgt $3R$. Ein kleiner Fisch, der sich anfangs an dem dem Spiegel nächstgelegenen Punkt befindet, beginnt, sich mit der Geschwindigkeit v entlang der Wand zu bewegen. Ein Beobachter betrachtet den Fisch aus sehr großer Entfernung entlang einer horizontalen Geraden durch den Mittelpunkt des Aquariums.

Mit welcher Relativgeschwindigkeit v_{rel} bewegen sich die beiden vom Beobachter gesehenen Bilder des Fisches auseinander? Drücken Sie Ihre Antwort durch v aus. Nehmen Sie an, dass:

- Die Wand des Aquariums aus sehr dünnem Glas besteht.
- Der Brechungsindex von Wasser $n = 4/3$ beträgt.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- 4. Die anfängliche Relativgeschwindigkeit beträgt

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

Das direkte Bild bewegt sich mit $2v$, während sich das durch Reflexion gesehene Bild mit $2v/3$ in die entgegengesetzte Richtung bewegt.

Lösung

4. Wir wählen die Blickachse als x -Achse, die vom Beobachter zum Spiegel gerichtet ist. Der Mittelpunkt des Aquariums liege bei $x = 0$, der Spiegel bei $x = 3R$ und der Fisch anfangs bei $x = R$.

Wir wählen die transversale y -Richtung entlang der anfänglichen Bewegungsrichtung des Fisches. Da sich der Fisch tangential zur kugelförmigen Wand bewegt, ist seine Verschiebung in erster Ordnung in der Zeit

$$y = vt,$$

während seine axiale Verschiebung von zweiter Ordnung ist. Daher können wir seine axiale Koordinate bei der Berechnung der **anfänglichen** Bildgeschwindigkeiten gleich R setzen.

Das dünne Glas kann vernachlässigt werden: Die Brechungen an seinen beiden nahezu zusammenfallenden Grenzflächen ergeben zusammen eine Brechung unmittelbar zwischen Wasser und Luft. Wir verwenden das Snelliussche Brechungsgesetz in paraxialer Näherung, die für die anfängliche Bewegung in der Nähe der Achse ausreicht.

Aufgrund der Umkehrbarkeit des Lichtwegs verfolgen wir die Strahlen rückwärts vom weit entfernten Beobachter zum Fisch. Mit der erforderlichen Genauigkeit verlaufen diese Strahlen zunächst parallel zur Achse. Ihre Höhe h an der dem Beobachter zugewandten Oberfläche bei $x = -R$ gibt die scheinbare transversale Bildposition an.

An dieser Oberfläche bildet die ins Wasser gerichtete Normale mit der Achse den kleinen Winkel $-h/R$. Bildet der gebrochene Strahl den Winkel α , so liefert das Snelliussche Brechungsgesetz

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right).$$

Folglich gilt

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

Nach dem Durchqueren des Aquariums beträgt seine Höhe an der dem Spiegel zugewandten Oberfläche bei $x = R$

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}.$$

Direktes Bild. Beim direkten Strahlengang erreicht der rückwärts verfolgte Strahl den Fisch an dieser Oberfläche, sodass $k = y$ gilt. Daher ist

$$h_d = 2y, \quad \boxed{\dot{h}_d = 2v}.$$

Durch Reflexion gesehenes Bild. Bei diesem Strahlengang tritt der rückwärts verfolgte Strahl durch die dem Spiegel zugewandte Oberfläche hindurch und läuft weiter zum Spiegel. Die nach außen gerichtete Oberflächennormale bildet mit der Achse den Winkel k/R . Ist der Winkel des Strahls in Luft γ , so liefert das Snelliussche Brechungsgesetz

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}.$$

Mit $n = 4/3$, $\alpha = -h/(4R)$ und $k = h/2$ ergibt sich

$$\gamma = n\alpha - (n-1) \frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

Wir können den Strahlengang bei der Reflexion am ebenen Spiegel entfalten, indem wir den Fisch durch sein Spiegelbild ersetzen. Dessen axiale Koordinate ist

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

und seine transversale Koordinate bleibt y . Da sich der Fisch an der Wand befindet, kommt durch die Brechung an der Stelle, an der der Strahl ihn schließlich erreicht, keine zusätzliche Ausbreitungsstrecke hinzu.

Der entfaltete Strahl legt von der dem Spiegel zugewandten Oberfläche des Aquariums bis zu dieser gespiegelten Position eine axiale Strecke von $4R$ zurück. Daher gilt

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

Somit hat das reflektierte Bild die scheinbare transversale Position und Geschwindigkeit

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}.$$

Die beiden Bilder bewegen sich in entgegengesetzte transversale Richtungen. Ihre anfängliche Relativgeschwindigkeit beträgt daher

$$\boxed{v_{\text{rel}} = \left| \dot{h}_d - \dot{h}_r \right| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.