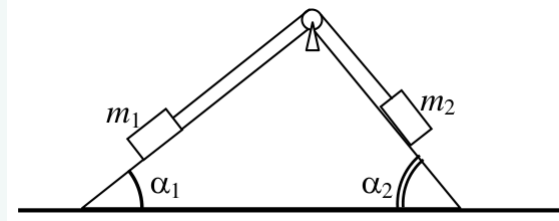


المسألة 1: كتلتان على منشور ثلاثي موضوع على مستوى عديم الاحتكاك

وُضع منشور ثلاثي كتلته M بحيث يستند أحد أوجهه إلى مستوى أفقي عديم الاحتكاك، كما هو موضح في الشكل 1. ويميل الوجهان الآخران على المستوى بزاويتين α_1 و α_2 على الترتيب. ويمكن لكتلتين مقداراهما m_1 و m_2 ، موصولتين بخيط غير قابل للاستطالة، أن تنزلقا دون احتكاك على سطح المنشور. وكتلة البكرة التي يمر عليها الخيط مهملة.

- عرِّ عن تسارع الكتلتين a بالنسبة إلى المنشور بدلالة تسارع المنشور a_0 .
- أوجد تسارع المنشور a_0 بدلالة المقادير المعطاة وتسارع الجاذبية g .
- عند أي نسبة m_1/m_2 يكون المنشور في حالة اتزان؟



الشكل 1

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

يتضمن المصدر ثلاث نقاط غير مرقمة، ولا يحدد درجات لها؛ وقد رُمز إليها أدناه بـ (1)–(3).
نعدّ a_0 موجِّباً نحو اليمين، و a موجِّباً عندما تتسارع m_1 إلى أسفل وجهها وتتسارع m_2 إلى أعلى وجهها، بالنسبة إلى المنشور.

$$a = \frac{g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)}{m_1 + m_2} \quad 1.$$

$$a_0 = \frac{g(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2)}{(m_1 + m_2)(M + m_1 + m_2) - (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)^2} \quad 2.$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \quad 3.$$

الحل

نستخدم التقريب المعتاد للخيط المثالي: الخيط عديم الكتلة ومشدود، والبكرة تدور دون احتكاك وقصورها الذاتي مهمل. ومن ثم، يكون الشد T متساوياً على الجانبين. ويتحرك المنشور حركة انتقالية أفقية، وتظل الكتلتان ملامستين لوجهيهما.

بما أن الخيط غير قابل للاستطالة والبكرة مثبتة بالمنشور، فإن للكتلتين تسارعين نسبیین متساویین مقداراً وإشارةً عند قياسهما نحو أسفل الوجه الأيسر ونحو أعلى الوجه الأيمن.

(1) التسارع النسبي بدلالة a_0

نعمل في الإطار المرجعي العطالي للمستوى الأفقي. ويساوي التسارع المطلق لكل كتلة مجموع تسارع المنشور وتسارعها بالنسبة إليه. بالنسبة إلى m_1 ، نختار الاتجاه الموجب نحو أسفل سطحها المائل. وإسقاط تسارع المنشور المتجه نحو اليمين على هذا الاتجاه هو $-a_0 \cos \alpha_1$. لذلك، يعطي قانون نيوتن الثاني على امتداد السطح المائل

$$m_1(a - a_0 \cos \alpha_1) = m_1 g \sin \alpha_1 - T.$$

بالنسبة إلى m_2 ، نختار الاتجاه الموجب نحو أعلى سطحها المائل. والمعادلة المقابلة هي

$$m_2(a - a_0 \cos \alpha_2) = T - m_2 g \sin \alpha_2.$$

ليس للقوى العمودية مركبات على امتداد السطحين المائلين. وجمع المعادلتين يُحذف T :

$$(m_1 + m_2)a = g(m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2) + a_0(m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2).$$

وبالقسمة على $m_1 + m_2$ نحصل على الإجابة (1).

(2) تسارع المنشور

لا تؤثر في النظام بأكمله أي قوة خارجية أفقية: فالجاذبية والقوة العمودية التي يؤثر بها المستوى الداعم رأسيّتان. ولذلك تُحفظ كمية حركته الأفقية، ومن ثم يكون التسارع الأفقي لمركز كتلته صفراً.

عندما يكون a موجباً، تتسارع كلتا الكتلتين نحو اليسار بالنسبة إلى المنشور. وتسارعهما الأفقيان المطلقان هما

$$a_{1x} = a_0 - a \cos \alpha_1, \quad a_{2x} = a_0 - a \cos \alpha_2.$$

ومن ثم

$$Ma_0 + m_1(a_0 - a \cos \alpha_1) + m_2(a_0 - a \cos \alpha_2) = 0,$$

أو

$$(M + m_1 + m_2)a_0 = (m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2)a.$$

للإيجاز، نعرّف

$$S = m_1 + m_2, \quad C = m_1 \cos \alpha_1 + m_2 \cos \alpha_2, \quad D = m_1 \sin \alpha_1 - m_2 \sin \alpha_2.$$

فتصبح المعادلتان

$$Sa = gD + Ca_0, \quad (M + S)a_0 = Ca.$$

وبحذف a ،

$$[S(M + S) - C^2]a_0 = gCD,$$

وهذا يعطي الإجابة (2).

بالنسبة إلى الوجهين المائلين الموضحين، $0 < C < S$ ، ولذلك

$$S(M + S) - C^2 = MS + (S^2 - C^2) > 0.$$

إذن يتسارع المنشور نحو اليمين إذا كان $m_1 \sin \alpha_1 > m_2 \sin \alpha_2$ ، ونحو اليسار إذا انعكس اتجاه المتباينة.

(3) شرط اتزان المنشور

يتطلب الاتزان أن يكون $a_0 = 0$. وبما أن $C > 0$ ، فإن حفظ كمية الحركة الأفقية يتطلب عندئذٍ أيضاً أن يكون $a = 0$. وتُختزل المعادلتان على امتداد السطحين المائلين إلى

$$T = m_1 g \sin \alpha_1 = m_2 g \sin \alpha_2.$$

وبناءً عليه،

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}.$$

عند هذه النسبة، يبقى المنشور الساكن ابتداءً ساكناً.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 2: الهيدروجين في أنبوب مغلق بعمود من الزئبق

يحتوي أنبوب زجاجي رأسي مساحة مقطعه $S = 1.0 \text{ cm}^2$ على كمية مجهولة من الهيدروجين. الطرف العلوي للأنبوب مغلق، أما الطرف الآخر فمفتوح ومغمور في حوض مملوء بالزئبق. يوضع الأنبوب والحوض في حجرة محكمة الإغلاق تحتوي على هواء عند درجة حرارة $T_0 = 273 \text{ K}$ وضغط $P_0 = 1.334 \times 10^5 \text{ Pa}$. في هذه الظروف، يبلغ ارتفاع عمود الزئبق في الأنبوب فوق مستوى الزئبق في الحوض $h_0 = 0.70 \text{ m}$.

أحد جدران الحجرة عبارة عن مكبس، يؤدي تحريكه إلى تمدد الهواء عند درجة حرارة ثابتة حتى يصبح ضغطه $P_1 = 8.00 \times 10^4 \text{ Pa}$. ونتيجة لذلك، ينخفض ارتفاع عمود الزئبق في الأنبوب إلى $h_1 = 0.40 \text{ m}$. ثم تُسخَّن الحجرة عند حجم ثابت إلى درجة حرارة T_2 حتى يرتفع عمود الزئبق إلى $h_2 = 0.50 \text{ m}$. وأخيراً، يُمدَّد الهواء في الحجرة عند ضغط ثابت، ويستقر مستوى الزئبق في الأنبوب عند ارتفاع $h_3 = 0.45 \text{ m}$ فوق مستوى الزئبق في الحوض.

بافتراض أن النظام في اتزان ميكانيكي وحراري خلال جميع العمليات، احسب كتلة الهيدروجين m ، ودرجة الحرارة الوسيطة T_2 ، والضغط P في الحالة النهائية.

كثافة الزئبق عند درجة الحرارة T_0 هي $\rho_0 = 1.36 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ ، ومعامل تمدد الزئبق هو $\beta = 1.84 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ ، وثابت الغازات هو $R = 8.314 \text{ J/(mol} \times \text{K)}$. يُهمل التمدد الحراري للأنبوب الزجاجي وتغير مستوى الزئبق في الحوض.

تلميح. إذا كان ΔT هو مقدار تغير درجة حرارة النظام، فإن $\beta \Delta T = x \ll 1$ في هذه الحالة، يمكنك استخدام التقريب:

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x.$$

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليس للسؤال 2 أجزاء فرعية مرقمة. وبالترتيب المطلوب:

- كتلة الهيدروجين: $m \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}$.
- درجة الحرارة الوسيطة: $T_2 \approx 358 \text{ K}$.
- ضغط الهيدروجين النهائي: $P_{\text{H}_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}$. ضغط هواء الحجرة النهائي هو $P_{\text{air}} \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}$ ؛ لا يوضح نص المسألة ما إذا كان «الضغط P في الحالة النهائية» يعني ضغط الهيدروجين أم ضغط هواء الحجرة، ولذلك ذُكرت القيمتان كليهما.

الحل

نعتبر الهيدروجين والهواء غازين مثاليين، مع إهمال تغيرات الضغط الهيدروستاتيكي داخل الغازين. نستخدم القيم القياسية

$$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}, \quad M_{\text{H}_2} = 2.0 \times 10^{-3} \text{ kg mol}^{-1}.$$

لتكن H ارتفاع الطرف المغلق للأنبوب فوق سطح الزئبق في الحوض. بما أن تمدد الزجاج وتغير مستوى الزئبق في الحوض مهملان، فإن H ثابت. في الحالة i ، يكون حجم الهيدروجين

$$V_i = S(H - h_i).$$

نرمز إلى ضغط هواء الحجرة بـ P_i ، وإلى ضغط الهيدروجين بـ p_i . من الاتزان الهيدروستاتيكي في الزئبق المتصل نحصل على

$$p_i = P_i - \rho_i g h_i.$$

يعني الاتزان الحراري أن الغازين والزئبق لها درجة الحرارة نفسها في كل حالة.

كتلة الهيدروجين m .

يحدث التمدد الأول عند درجة حرارة ثابتة T_0 ، ولذلك تظل كثافة الزئبق مساوية لـ ρ_0 . ومن ثم

$$p_0 = P_0 - \rho_0 g h_0 = 4.00088 \times 10^4 \text{ Pa},$$

$$p_1 = P_1 - \rho_0 g h_1 = 2.66336 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

تخضع كمية الهيدروجين الثابتة لقانون بويل:

$$p_0 S(H - h_0) = p_1 S(H - h_1).$$

وبالتالي،

$$H = \frac{p_0 h_0 - p_1 h_1}{p_0 - p_1} \approx 1.29738 \text{ m}.$$

باستخدام $S = 1.0 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ، تكون كمية مادة الهيدروجين

$$n = \frac{p_0 S(H - h_0)}{RT_0} \approx 1.0530 \times 10^{-3} \text{ mol}.$$

وعليه،

$$m = n M_{\text{H}_2} \approx 2.1 \times 10^{-6} \text{ kg} = 2.1 \text{ mg}.$$

لإجراء الحسابات المتبقية، نعرّف الثابت

$$C = \frac{nR}{S} \approx 87.5475 \text{ Pa m K}^{-1}.$$

فتصبح معادلة الغاز المثالي للهيدروجين

$$p_i = \frac{CT_i}{H - h_i}.$$

درجة الحرارة الوسيطة T_2 .

يعطي التمدد الحجمي للزئبق كثافته بدلالة درجة الحرارة:

$$\rho(T) = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)} \approx \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)],$$

حيث استُخدم في التعبير الأخير التقريب المعطى من الرتبة الأولى.

خلال التسخين عند حجم ثابت، يحقق هواء الحجرة العلاقة

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0}.$$

بدمج هذه العلاقة مع شرط الاتزان الهيدروستاتيكي وقانون الغاز للهيدروجين عند h_2 ، نحصل على

$$\frac{CT_2}{H - h_2} = P_1 \frac{T_2}{T_0} - \rho_0 g h_2 [1 - \beta(T_2 - T_0)].$$

بتجميع الحدود التي تحتوي على T_2 ، نحصل على

$$\left[\frac{P_1}{T_0} - \frac{C}{H - h_2} + \beta \rho_0 g h_2 \right] T_2 = \rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0).$$

ومن ثم

$$T_2 = \frac{\rho_0 g h_2 (1 + \beta T_0)}{P_1/T_0 - C/(H - h_2) + \beta \rho_0 g h_2} \approx 358.32 \text{ K},$$

وعليه

$$T_2 \approx 358 \text{ K}.$$

ضغط هواء الحجرة في هذه المرحلة هو

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_0} \approx 1.05002 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

الضغط في الحالة النهائية.

يحدث التمدد الأخير عند ضغط ثابت لهواء الحجرة. لذلك،

$$P_3 = P_2 \approx 1.05 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

لتحديد ضغط الهيدروجين، يجب أيضاً إيجاد درجة حرارته النهائية T_3 . عند $h_3 = 0.45 \text{ m}$ ،

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} = P_2 - \rho_0 g h_3 [1 - \beta(T_3 - T_0)].$$

بإعادة الترتيب،

$$\left[\frac{C}{H - h_3} - \beta \rho_0 g h_3 \right] T_3 = P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0).$$

إذن

$$T_3 = \frac{P_2 - \rho_0 g h_3 (1 + \beta T_0)}{C/(H - h_3) - \beta \rho_0 g h_3} \approx 454.64 \text{ K}.$$

وبالتالي، يكون ضغط الهيدروجين النهائي

$$p_3 = \frac{CT_3}{H - h_3} \approx 4.6971 \times 10^4 \text{ Pa},$$

أو

$$P_{H_2} \approx 4.7 \times 10^4 \text{ Pa}.$$

وأخيراً، فإن معاملي التمدد هما

$$\beta(T_2 - T_0) \approx 0.0157, \quad \beta(T_3 - T_0) \approx 0.0334.$$

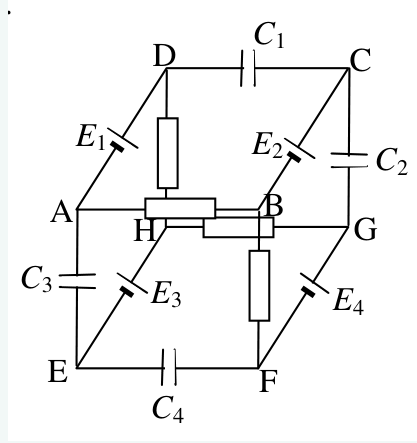
كلاهما صغير، بما يتفق مع التقريب المطلوب في التلميح.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.

المسألة 3: دائرة كهربائية على شكل مكعب من البطاريات والمكثفات

وُصِّلت أربع بطاريات ذات قوى دافعة كهربائية $E_1 = 4 \text{ V}$ ، $E_2 = 8 \text{ V}$ ، $E_3 = 12 \text{ V}$ ، و $E_4 = 16 \text{ V}$ ، وأربعة مكثفات لها السعة نفسها $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 1 \mu\text{F}$ ، وأربع مقاومات متساوية القيمة، في الدائرة المبينة في الشكل 3. المقاومة الداخلية للبطاريات مهملة.

- احسب الطاقة الكلية W المخزنة في المكثفات عندما يستقر النظام في حالة مستقرة.
- وُصّلت النقطتان H و B بقصر كهربائي. أوجد شحنة المكثف C_2 في الحالة المستقرة الجديدة.



الشكل 3

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

يُشار إلى البندين غير المرقمين بالرمزين (1) و (2) فيما يلي.

1. الطاقة الكلية المخزنة: $W = 26 \mu\text{J}$.

2. شحنة المكثف C_2 بعد قصر H و B: $Q_2 = 0 \text{ C}$.

الحل

لتكن مقاومة كل مقاوم R . تقع المقاومات على الأحرف AB ، BF ، DH ، و HG ؛ ولا تشكّل التقاطعات في الإسقاط نقاط توصيل إضافية.

تشير الخطوط الطويلة في رموز البطاريات إلى الأقطاب الموجبة، ومن ثم

$$\begin{aligned} V_D - V_A &= E_1, & V_C - V_B &= E_2, \\ V_H - V_E &= E_3, & V_G - V_F &= E_4. \end{aligned}$$

في الحالة المستقرة، تكون فروق الجهد بين طرفي المكثفات ثابتة، ولا يمر تيار عبر المكثفات.

(1) الطاقة الكلية المخزنة

عندما تكون فروع المكثفات مفتوحة، تكون الحلقة الوحيدة التي يمر فيها تيار هي

$$F \longrightarrow G \longrightarrow H \longrightarrow D \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow F.$$

لا يمر تيار في الحالة المستقرة في الفرعين اللذين يحتويان على E_2 و E_3 .

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد حول الحلقة التي يمر فيها التيار، نحصل على

$$E_4 - E_1 - 4IR = 0.$$

إذن، يكون هبوط الجهد عبر كل مقاوم

$$IR = \frac{E_4 - E_1}{4} = \frac{16 - 4}{4} \text{ V} = 3 \text{ V}.$$

باختيار $V_F = 0$ ، نحصل من ارتفاع الجهد عبر البطارية وهبوطات الجهد المتتالية على

$$V_G = 16 \text{ V}, \quad V_H = 13 \text{ V}, \quad V_D = 10 \text{ V}, \\ V_A = 6 \text{ V}, \quad V_B = 3 \text{ V}.$$

وتحدد البطاريات المتبقيتان الجهدين

$$V_C = V_B + E_2 = 11 \text{ V}, \quad V_E = V_H - E_3 = 1 \text{ V}.$$

وبناءً على ذلك، تكون فروق الجهد بين طرفي المكثفات كما يلي:

المكثف	مقدار فرق الجهد	اللوحي الموجب
C_1	$ V_D - V_C = 1 \text{ V}$	C
C_2	$ V_C - V_G = 5 \text{ V}$	G
C_3	$ V_A - V_E = 5 \text{ V}$	A
C_4	$ V_E - V_F = 1 \text{ V}$	E

باستخدام الطاقة الكهروستاتيكية $W_i = \frac{1}{2} C_i U_i^2$

$$W = \frac{1}{2} (1 \times 10^{-6} \text{ F}) (1^2 + 5^2 + 5^2 + 1^2) \text{ V}^2.$$

إذن،

$$W = 2.6 \times 10^{-5} \text{ J} = 26 \mu\text{J}.$$

(2) شحنة C_2 بعد قصر H و B

يجعل القصر الكهربائي $V_H = V_B$. نختار جهدهما المشترك مساوياً للصفر:

$$V_H = V_B = 0.$$

وعندئذ تحدد البطارية E_2 الجهد

$$V_C = E_2 = 8 \text{ V}.$$

في الحالة المستقرة الجديدة، لا يمر تيار عبر المكثفات مرة أخرى. تدفع البطارية E_4 تياراً في حلقة تمر عبر المقاومين المتساويين GH و BF ، ومن ثم

$$I_4 = \frac{E_4}{2R}.$$

لذلك يكون جهد G بالنسبة إلى H

$$V_G - V_H = I_4 R = \frac{E_4}{2} = 8 \text{ V}.$$

وعليه، فإن $V_G = V_C$ ، وينعدم فرق الجهد بين طرفي C_2 :

$$U_2 = V_C - V_G = E_2 - \frac{E_4}{2} = 0.$$

وبالتالي تكون شحنته النهائية

$$Q_2 = C_2 |U_2| = 0 \text{ C}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 4: سمكة في حوض كروي أمام مرآة مستوية

يوضع حوض أسماك كروي مملوء بالماء أمام مرآة مستوية رأسية. نصف قطر الحوض هو R ، والمسافة بين مركزه والمرآة هي $3R$. تبدأ سمكة صغيرة، تقع في البداية عند النقطة الأقرب إلى المرآة، بالحركة بسرعة v بمحاذاة الجدار. ينظر راصد إلى السمكة من مسافة بعيدة جداً على امتداد خط أفقي يمر بمركز الحوض.

ما السرعة النسبية v_{rel} التي تتباعد بها صورتا السمكة اللتان يراها الراصد؟ عبّر عن إجابتك بدلالة v . افترض ما يأتي:

- جدار الحوض مصنوع من زجاج رقيق جداً.
- معامل انكسار الماء هو $n = 4/3$.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- 4. السرعة النسبية الابتدائية هي

$$v_{\text{rel}} = \frac{8}{3}v.$$

تتحرك الصورة المباشرة بسرعة $2v$ ، بينما تتحرك الصورة المرئية بالانعكاس في الاتجاه المعاكس بسرعة $2v/3$.

الحل

4. نتخذ محور الرؤية محوراً لـ x ، موجّهاً من الراصد نحو المرآة. نضع مركز الحوض عند $x = 0$ ، والمرآة عند $x = 3R$ ، والسمكة في البداية عند $x = R$.

نختار الاتجاه العرضي y في اتجاه حركة السمكة الابتدائية. ولأن السمكة تتحرك مماسياً للجدار الكروي، فإن إزاحتها إلى الرتبة الأولى في الزمن هي

$$y = vt,$$

بينما تكون إزاحتها المحورية من الرتبة الثانية. لذا يمكننا إبقاء إحداثيها المحوري مساوياً لـ R عند حساب سرعتي الصورتين الابتدائيتين. يمكن إهمال الزجاج الرقيق: إذ يكافئ الانكساران عند سطحيه اللذين يكادان يتطابقان انكساراً مباشراً بين الماء والهواء. نستخدم قانون سنيل في التقريب شبه المحوري، وهو كافٍ لوصف الحركة الابتدائية حول المحور.

استناداً إلى مبدأ انعكاسية مسار الضوء، ننتبع الأشعة عكسياً من الراصد البعيد نحو السمكة. وضمن الدقة المطلوبة، تسير هذه الأشعة في البداية موازية للمحور. ويحدد ارتفاعها h عند السطح المواجه للراصد، $x = -R$ ، الموضع العرضي الظاهري للصورة.

عند هذا السطح، يصنع العمود على السطح الموجّه إلى داخل الماء زاوية صغيرة مقدارها $-h/R$ مع المحور. وإذا صنع الشعاع المنكسر زاوية α ، فإن قانون سنيل يعطي

$$0 + \frac{h}{R} = n \left(\alpha + \frac{h}{R} \right).$$

ومن ثم،

$$\alpha = -\frac{n-1}{n} \frac{h}{R} = -\frac{h}{4R}.$$

بعد عبور الشعاع الحوض، يكون ارتفاعه عند السطح المواجه للمرآة، $x = R$ ، هو

$$k = h + 2R\alpha = \frac{h}{2}.$$

الصورة المباشرة. في المسار المباشر، يصل الشعاع المتتبع عكسياً إلى السمكة عند هذا السطح، ولذلك $k = y$. وعليه،

$$h_d = 2y, \quad \boxed{\dot{h}_d = 2v}.$$

الصورة المرئية بالانعكاس. في هذا المسار، يواصل الشعاع المتتبع عكسياً سيره عبر السطح المواجه للمرآة نحو المرآة. ويصنع العمود على السطح الموجه إلى الخارج زاوية k/R مع المحور. وإذا كانت زاوية الشعاع في الهواء هي γ ، فإن قانون سنيل يعطي

$$n \left(\alpha - \frac{k}{R} \right) = \gamma - \frac{k}{R}.$$

باستخدام $n = 4/3$ ، و $\alpha = -h/(4R)$ ، و $k = h/2$ ،

$$\gamma = n\alpha - (n-1) \frac{k}{R} = -\frac{h}{2R}.$$

يمكننا فرد مسار الانعكاس عن المرآة المستوية باستبدال السمكة بصورتها في المرآة. ويكون إحداثي هذه الصورة المحوري

$$x_{\text{mirror image}} = 2(3R) - R = 5R,$$

ويبقى إحداثي العرضي y . وبما أن السمكة تقع عند الجدار، فإن الانكسار عند الموضع الذي يصل فيه الشعاع إليها في النهاية لا يضيف أي مسافة انتشار إضافية.

يقطع الشعاع في المسار المفرد مسافة محورية $4R$ من سطح الحوض المواجه للمرآة إلى موضع هذه الصورة المرآتية. ومن ثم،

$$y = k + 4R\gamma = \frac{h}{2} + 4R \left(-\frac{h}{2R} \right) = -\frac{3h}{2}.$$

وبذلك يكون الموضع العرضي الظاهري للصورة المنعكسة وسرعتها

$$h_r = -\frac{2}{3}y, \quad \boxed{\dot{h}_r = -\frac{2}{3}v}.$$

تتحرك الصورتان في اتجاهين عرضيين متعاكسين. لذا فإن سرعتيهما النسبية الابتدائية هي

$$\boxed{v_{\text{rel}} = \left| \dot{h}_d - \dot{h}_r \right| = 2v + \frac{2}{3}v = \frac{8}{3}v}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.