

IPhO 1970

理论题与解答 · 苏联莫斯科 · 4 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1970/

题目 1：在桌面上滑动的长杆上的电动小车

一根质量为 $M = 1 \text{ kg}$ 的长杆放在光滑的水平桌面上，可以无摩擦地运动。一辆装有电动机的小车可沿长杆的水平上表面滑动，小车的质量为 $m = 0.1 \text{ kg}$ 。小车与长杆之间的摩擦系数为 $\mu = 0.02$ 。

电动机以恒定速率 $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$ 将一根细线卷绕在轴上。在一种情况下，细线的另一端系在较远处的固定支架上（图 1, a）；在另一种情况下，细线的另一端系在长杆边缘的固定桩上（图 1, b）。先保持长杆固定，让小车开始以速度 V_0 运动，然后释放长杆。

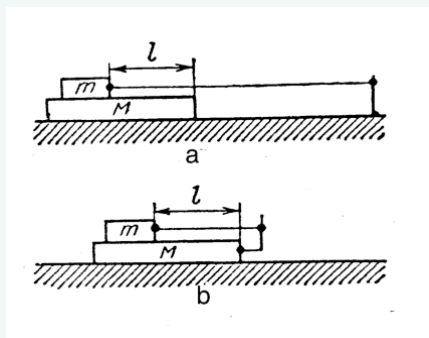


图 1

释放长杆的瞬间，小车的前缘距长杆的前缘为 $l = 0.5 \text{ m}$ 。对这两种情况，分别求长杆和小车的运动规律，以及小车到达长杆前缘所需的时间。

题目译自官方英文原文。

答案

以释放瞬间为 $t = 0$ ，取向前的方向为正方向。用 x_b 和 x_c 分别表示长杆和小车相对于各自初始位置的位移。取 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ，定义

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m s}^{-2}, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

- (a) 细线系在固定支架上：

$$\boxed{x_c(t) = v_0 t, \quad x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}}$$

在 t_* 之后，两物体均以 0.1 m s^{-1} 的速度运动。小车永远不会到达长杆前缘：剩余间距为

$$\boxed{d_{\min} = l - \frac{Mv_0^2}{2\mu mg} \approx 0.25 \text{ m.}}$$

- (b) 细线系在长杆上：

$$\boxed{x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.}$$

长杆保持静止，小车到达长杆前缘所需的时间为

$$\boxed{t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s.}}$$

解答

将细线视为质量可忽略且不可伸长，并将 v_0 理解为细线恒定的卷绕线速度。细线沿水平方向，因此小车所受的支持力为 mg 。滑动过程中，摩擦力的大小为

$$f = \mu mg.$$

桌面对长杆没有水平方向的作用力。

释放前，在两种装置中，长杆和细线的连接点均静止。因此，小车的初速度为

$$V_0 = v_0.$$

撤去约束不会产生冲量，因此刚释放后有

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

(a) 细线系在固定支架上

由于细线的远端固定，以速率 v_0 卷绕细线会使小车以相同的速率接近该端：

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

最初，小车相对于长杆向前滑动。小车所受的摩擦力向后，长杆所受的摩擦力向前。设细线的张力为 T ，由牛顿第二定律可得

$$m\dot{v}_c = T - f = 0, \quad M\dot{v}_b = f.$$

因此 $T = f$ ，长杆具有恒定的加速度

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

只要小车仍相对于长杆向前滑动，就有

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2}at^2.$$

相对速度为

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

相对速度在下列时刻变为零：

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s}.$$

截至这一时刻，小车相对于长杆的向前位移为

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2} a t_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

代入数值得

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m}.$$

由于 $s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$ ，相对运动停止时，小车尚未到达长杆前缘。

在 t_* 时刻，两物体的速度均为 v_0 。此后，它们可以在不受水平力的情况下继续一起运动：摩擦力和张力均为零。因此，由滑动摩擦力产生的加速度必须在这一时刻变为零。当 $t \geq t_*$ 时，

$$v_b = v_c = v_0,$$

且

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

两前缘之间的距离为

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

其最终值约为 0.245 m，因此不存在有限的到达时间。

(b) 细线系在长杆上

在这种情况下，电动机使小车与长杆上某一固定点之间的距离缩短。因此，

$$v_c - v_b = v_0.$$

所有水平力都是长杆与小车组成的系统的内力：细线向前拉小车、向后拉长杆，而两者之间的摩擦力则是一对大小相等、方向相反的力，其方向分别与各自所受的拉力相反。因此，系统的总水平动量守恒：

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

其中等号右侧为释放瞬间的动量。

代入 $v_c = v_b + v_0$ ，得

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

所以

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

因此

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

张力等于滑动摩擦力，即 $T = \mu mg$ ，因此每个物体所受的合力均为零。

两前缘之间的距离均匀减小：

$$d(t) = l - v_0 t.$$

令 $d = 0$, 得

$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：根据 NaCl 晶胞求氢原子的质量

氯化钠（食盐，NaCl）晶体的一个晶胞是边长为 $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ 的立方体（图2）。图中的黑圆表示钠原子的位置，白圆表示氯原子的位置。整个食盐晶体由这样的晶胞重复排列而成。钠的相对原子质量为 23，氯的相对原子质量为 35.5。食盐的密度为 $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ 。求一个氢原子的质量。

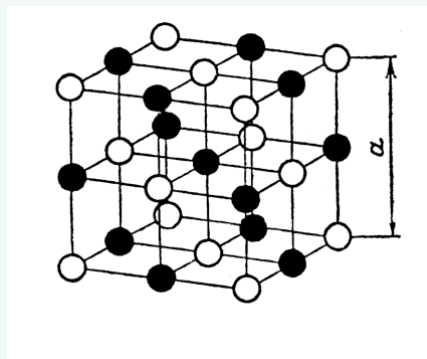


图 2

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2. $m_{\text{H}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, 保留两位有效数字则为 $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ 。

解答

题目 2.

归属于一个晶胞的质量等于其体积乘以晶体密度：

$$M_{\text{晶胞}} = \rho a^3.$$

计算归属于一个晶胞的原子数时，需要考虑相邻晶胞对原子的共有情况。位于顶点的原子由八个晶胞共有，位于棱中点的原子由四个晶胞共有，位于面心的原子由两个晶胞共有。位于立方体内部的原子完全属于该晶胞。

白圆表示位于八个顶点和六个面心的氯原子。每个晶胞中实际分摊到的氯原子数为

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

黑圆表示位于十二条棱的中点和体心的钠原子：

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

因此，每个晶胞含有四个 NaCl 化学式单位。

在本题所要求的精度下，取氢的相对原子质量为 1，并忽略化学键合引起的质量变化。由给定的相对原子质量可得

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_{\text{H}}, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_{\text{H}}.$$

因此，

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_{\text{H}} = 234m_{\text{H}}.$$

解得氢原子的质量为

$$m_{\text{H}} \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

由于给定的边长有两位有效数字，

$$m_{\text{H}} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：带电球壳内的接地金属球

在一个半径为 $R = 20 \text{ cm}$ 的薄壁金属球壳内，有一个半径为 $r = 10 \text{ cm}$ 的金属球，两者同心。金属球通过一根很长的导线接地，导线穿过球壳上的一个小孔（图 3）。向外球壳施加电荷 $Q = 10^{-8} \text{ C}$ 。计算该球壳的电势、由这些导体构成的系统的电容，并画出等效电路图。

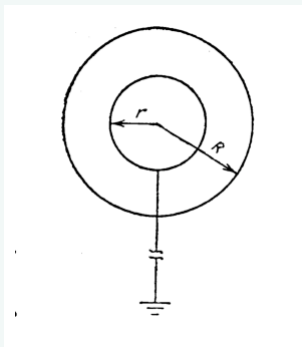


图 3

题目译自官方英文原文。

答案

题目 3 没有编号小问。按题目要求的顺序：

- 外球壳相对于大地的电势：

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V}.$$

- 系统的电容：

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}.$$

- 等效电路图：两个电容器在外球壳与大地之间并联：

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF}.$$

解答

忽略小孔和连接导线造成的扰动，并将大地视为远处电势为零的导体。球壳的厚度可以忽略，因此其内、外表面的半径均为 R 。

外球壳与其他导体绝缘，其总电荷保持为 Q 。而内部金属球可以与大地交换电荷。

外球壳的电势。

设内部金属球上的最终电荷为 q 。在静电平衡时，球壳金属内部的电场为零。因此，位于该金属内部的高斯面所包围的净电荷为零。于是，球壳内表面带有电荷 $-q$ ，外表面带有电荷

$$Q_{\text{outer}} = Q + q.$$

记 $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ 。均匀带电球面在其内部各处产生的电势均为常量 kQ/R 。因此，内部金属球的电势为

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

由于金属球接地，

$$V_{\text{ball}} = 0 \implies q = -Q \frac{r}{R}.$$

代入数值得

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

因此，球壳的内、外表面各带有 $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ 的电荷。

球壳处的电势为

$$V = k \frac{Q + q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

取 $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$,

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

系统的电容。

电容等于施加在绝缘球壳上的电荷与球壳相对于大地的电势之比：

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R - r}.$$

因此

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

等效电路图。

球壳上储存的电荷由两部分组成。

间隙中的电场对应于球壳与接地金属球之间的球形电容器。其电势差为

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

因此其电容为

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r}.$$

外部电场对应于球壳外表面与远处大地之间的电容器。由于

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

这一部分的电容为

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

两个电容器都以球壳作为一端。它们的另一端——金属球和大地——通过接地导线相连，因此它们是并联的：

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R - r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r}.$$

画等效电路图时，用节点 S 表示外球壳，并从该节点引出两条支路。在每条支路中各放置一个电容器，分别标注为 $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$ 和 $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$ 。将它们的另一端连接到一个带有接地符号的公共节点。每个电容器两端的电势差均为 225 V ，球壳端为正。

解答已与官方解答核对。

题目 4：望远镜的球面反射镜及其焦点处的圆盘形接收器

望远镜中装有一面球面反射镜。其口径为 $D = 0,5 \text{ m}$ ，曲率半径为 $R = 2 \text{ m}$ 。反射镜的主焦点处放置了一个圆盘形的辐射接收器。圆盘垂直于反射镜的光轴放置（图4）。接收器的半径 r 应为多大，才能接收到反射镜反射的全部辐射通量？如果探测器的尺寸缩小为原来的八分之一，接收到的辐射通量会如何减少？

提示：1) 当计算涉及小量 α ($\alpha \ll 1$) 时，可以采用近似代换 $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$ ；2) 不考虑衍射。

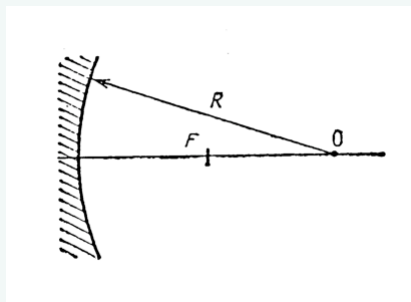


图 4

答案

- 所需的接收器半径：

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

不采用小孔径展开时，几何计算结果为 2.024... mm。

- 线性尺寸缩小为原来的八分之一后的通量：

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

接收到的通量约降至原来的 **四分之一**，即**损失 75%**。不作展开的光线几何计算给出的保留比例为 0.25449...。

解答

所需的接收器半径

假设光源位于光轴上的远处，入射光线相互平行，且在反射镜的整个孔径内均匀照明。我们采用几何光学方法，并忽略衍射。

设反射镜的顶点位于 $z = 0$ ，曲率中心位于 $z = R$ 。因此，其近轴焦点位于

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

将孔径半径记为

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

考虑一条位于光轴上方、高度为 h 的入射光线。设在其反射点 P 处，法线与光轴的夹角为 θ 。由球面的几何关系可得

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

根据反射定律，反射光线以与光轴成 2θ 的角度向光轴传播。当它到达焦平面 $z = f$ 时，其带符号的高度为

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

代入上述表达式，得

$$\begin{aligned} y_F &= R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta \\ &= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

负号表示光线在到达近轴焦平面之前已经穿过光轴：这就是球差。

因此，该光线在这一平面内到光轴的距离为

$$\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2}\right)}{1 - 2h^2/R^2}.$$

对于本题给定的孔径，分子随 h 增大而增大，而保持为正的分子随之减小。因此， $\rho(h)$ 随 h 增大而增大，所需的圆盘半径由最外缘的光线决定：

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2}\right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

代入给定数值，得

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

为得到题目要求的小量近似，注意到

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

利用题目给出的展开式，

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

因此，在 $\rho(h)$ 中保留最低阶非零项，得

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

于是，

$$r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ m} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 2.0 \text{ mm}.$$

探测器尺寸缩小后的通量

线性尺寸缩小为原来的八分之一后，探测器的半径为

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

由于 $\rho(h)$ 随 h 增大而增大，这个较小的圆盘接收的是反射镜孔径中央区域反射的光线，该区域的半径 b 由下式确定：

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

利用刚刚导出的三次方关系，

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

因此

$$b = \frac{a}{2}.$$

当入射照明均匀且反射率均匀时，反射通量正比于向探测器贡献光线的**孔径投影面积**。因此，

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

因此，接收到的通量约降至原来的四分之一。

作为比较，使用未经展开的 $\rho(h)$ 表达式，由方程 $\rho(b) = \rho(a)/8$ 得到 $b = 0.126117 \dots \text{ m}$ ，从而

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449 \dots,$$

与最低阶近似结果一致。

解答已与官方解答核对。本解答与官方解答不同之处，均为官方解答中的错误或印刷错误。