

IPhO 1970

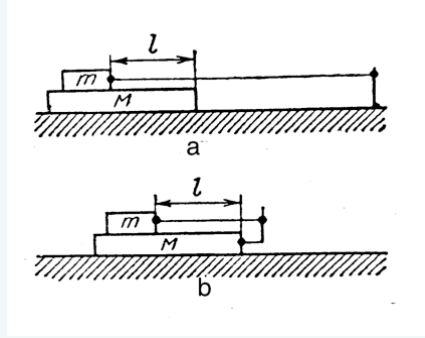
Teorik sorular ve çözümler · Moskova, SSCB · 4 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1970/

Soru 1: Masa üzerinde kayan bir çubuk üzerindeki motorlu araba

Kütlesi $M = 1$ kg olan uzun bir çubuk, bir masanın sürtünmesiz olarak hareket edebileceği pürüzsüz yatay yüzeyine yerleştirilmiştir. Motorla donatılmış bir araba, çubuğun yatay üst yüzeyi boyunca kayabilmektedir; arabanın kütlesi $m = 0.1$ kg'dır. Araba ile çubuk arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.02$ 'dir.

Motor, bir ipi bir milin etrafına sabit $v_0 = 0.1$ m/s hızıyla sarmaktadır. İpin diğer ucu, bir durumda oldukça uzaktaki sabit bir desteğe (Şekil 1, a), diğer durumda ise çubuğun kenarındaki bir kazığa (Şekil 1, b) bağlanmıştır. Çubuk sabit tutulurken arabanın V_0 hızıyla harekete geçmesi sağlanır, ardından çubuk serbest bırakılır.



Şekil 1

Çubuğun serbest bırakıldığı anda arabanın ön kenarı, çubuğun ön kenarından $l = 0.5$ m uzaklıktadır. Her iki durum için hem çubuğun hem de arabanın hareket denklemlerini ve arabanın çubuğun ön kenarına ulaşması için geçen süreyi bulunuz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Serbest bırakılma anını $t = 0$, ileri yönü ise pozitif yön olarak alalım. x_b ve x_c , sırasıyla çubuğun ve arabanın kendi başlangıç konumlarına göre yer değiştirmelerini gösterebilir. $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ kullanarak şu tanımları yapalım:

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m s}^{-2}, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

- (a) İpin sabit desteğe bağlı olduğu durum:

$$x_c(t) = v_0 t,$$

$$x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

t_* anından sonra her iki cisim de 0.1 m s^{-1} hızıyla hareket eder. **Araba ön kenara hiçbir zaman ulaşmaz:** kalan mesafe

$$d_{\min} = l - \frac{Mv_0^2}{2\mu mg} \approx 0.25 \text{ m.}$$

olur.

- (b) İpin çubuğa bağlı olduğu durum:

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

Çubuk hareketsiz kalır ve araba çubuğun ön kenarına

$$t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s.}$$

süresinde ulaşır.

Çözüm

İpi kütsüz ve uzamayan bir ip olarak ele alalım ve v_0 'ı ipin sabit doğrusal sarılma hızı olarak yorumlayalım. İp yatay olduğundan arabaya etki eden normal kuvvet mg 'dir. Kayma sırasında sürtünme kuvvetinin büyüklüğü

$$f = \mu mg.$$

olur. Masa, çubuğa yatay kuvvet uygulamaz.

Serbest bırakılmadan önce her iki düzende de çubuk ve ipin bağlandığı nokta hareketsizdir. Dolayısıyla arabanın başlangıç hızı

$$V_0 = v_0.$$

olur. Çubuğu tutan kısıtlamanın kaldırılması bir itme oluşturmaz; bu nedenle serbest bırakılmanın hemen ardından

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

olur.

(a) İpin sabit desteğe bağlı olduğu durum

İpin uzaktaki ucu sabit olduğundan ipin v_0 hızıyla sarılması, arabanın bu uca aynı hızla yaklaşmasını sağlar:

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

Başlangıçta araba, çubuğa göre ileri doğru kayar. Sürtünme arabaya geriye, çubuğa ise ileriye doğru etki eder. İpteki gerilme T ise Newton'ın ikinci yasası

$$m\dot{v}_c = T - f = 0, \quad M\dot{v}_b = f.$$

bağıntılarını verir. Dolayısıyla $T = f$ olur ve çubuk

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

sabit ivmesine sahiptir. Araba ileri doğru kaydığı sürece

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2}at^2.$$

olur.

Bağıl hız

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

olur. Bu hız

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s.}$$

anında sıfır olur.

Arabanın bu ana kadar çubuğa göre ileri yöndeki yer değiştirmesi

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2}at_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

olur. Sayısal olarak,

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m.}$$

$s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$ olduğundan bağıl hareket durduğunda araba henüz kenara ulaşmamıştır.

t_* anında her iki cismin hızı da v_0 'dır. Bundan sonra yatay kuvvetler olmadan birlikte hareket etmeyi sürdürebilirler: sürtünme ve gerilmenin her ikisi de sıfırdır. Bu nedenle kayma sürtünmesinden kaynaklanan ivme bu anda sona ermelidir. $t \geq t_*$ için

$$v_b = v_c = v_0,$$

ve

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

olur.

Ön kenarlar arasındaki mesafe

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

olur. Bu mesafenin son değeri yaklaşık 0.245 m 'dir; dolayısıyla **sonlu bir ulaşma süresi yoktur**.

(b) İpin çubuğa bağlı olduğu durum

Burada motor, araba ile çubuğa sabitlenmiş bir nokta arasındaki mesafeyi kısaltır. Bu nedenle,

$$v_c - v_b = v_0.$$

Yatay kuvvetlerin tümü çubuk–araba sisteminin iç kuvvetleridir: ip arabayı ileriye, çubuğu geriye doğru çekerken sürtünme, bunlara ters yönlerde eşit büyüklükte ve zıt yönlü bir kuvvet çifti oluşturur. Bu nedenle toplam yatay momentum korunur:

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

burada sağ taraf, serbest bırakılma anındaki momentumdur.

$v_c = v_b + v_0$ yerine konulduğunda,

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

dolayısıyla

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

elde edilir. Böylece

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

olur. Gerilme, kayma sürtünmesine eşittir: $T = \mu mg$; bu da her cisme etki eden net kuvvetin sıfır olmasını sağlar.

Ön kenarlar arasındaki mesafe sabit hızla azalır:

$$d(t) = l - v_0 t.$$

$d = 0$ alındığında

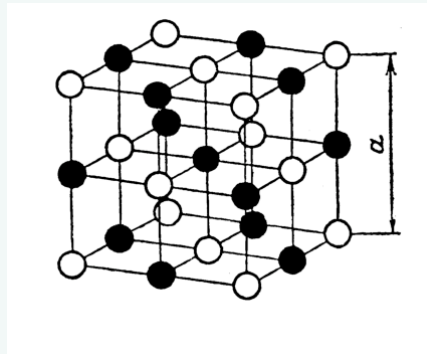
$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s.}$$

elde edilir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: NaCl birim hücresinden hidrojen atomunun kütlesi

Bir sodyum klorür (sofra tuzu- NaCl) kristalinin birim hücresi, kenar uzunluğu $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ olan bir küptür (Şekil 2). Şekildeki siyah daireler sodyum atomlarının konumlarını, beyaz daireler ise klor atomlarını göstermektedir. Sofra tuzu kristalinin tamamı, bu tür birim hücrelerin tekrarlanmasıyla oluşur. Sodyumun bağıl atom kütlesi 23, klorunki ise 35,5'tir. Sofra tuzunun yoğunluğu $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ değerindedir. Bir hidrojen atomunun kütlesini bulunuz.



Şekil 2

Cevaplar

- **Soru 2.** $m_H \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ veya iki anlamlı basamakla $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Çözüm

Soru 2.

Bir birim hücreye karşılık gelen kütle, hücrenin hacmi ile kristalin yoğunluğunun çarpımıdır:

$$M_{\text{hücre}} = \rho a^3.$$

Bir hücreye ait atomları saymak için komşu hücreler arasındaki ortak kullanımı hesaba katarız. Bir köşedeki atom sekiz hücreye, bir kenarın orta noktasındaki atom dört hücreye ve bir yüzün merkezindeki atom iki hücreye aittir. Küpün içindeki bir atom ise bütünüyle o hücreye aittir.

Beyaz daireler, sekiz köşede ve altı yüz merkezinde bulunan klor atomlarını temsil eder. Hücre başına etkin sayıları şöyledir:

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

Siyah daireler, on iki kenarın orta noktalarında ve küpün merkezinde bulunan sodyum atomlarını temsil eder:

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

Dolayısıyla her birim hücre dört NaCl formül birimi içerir.

Burada hedeflenen doğruluk düzeyinde, hidrojenin bağıl atom kütlelerini 1 alalım ve kimyasal bağlanmadan kaynaklanan kütle değişimlerini ihmal edelim. Bu durumda verilen bağıl atom kütlelerinden

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_H, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_H$$

bağıntıları elde edilir. Bunun sonucunda,

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_H = 234m_H.$$

Hidrojen atomunun kütlesi için çözersek

$$m_H \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}$$

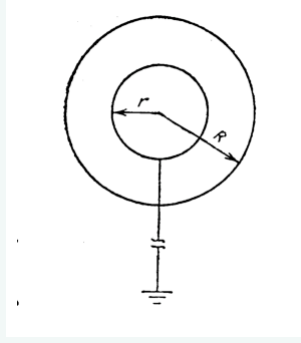
elde edilir. Kenar uzunluğu iki anlamlı basamakla verildiğinden,

$$m_H \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Yüklü bir küresel kabuğun içindeki topraklanmış metal küre

Yarıçapı $R = 20$ cm olan ince duvarlı bir metal kürenin içinde, onunla eş merkezli, yarıçapı $r = 10$ cm olan bir metal küre bulunmaktadır. İçteki küre, dıştaki kürede bulunan bir açıklıktan geçirilen çok uzun bir telle toprağa bağlanmıştır (Şek. 3). Dıştaki küreye $Q = 10^{-8}$ C yük verilmektedir. Bu kürenin potansiyelini ve oluşan iletkenler sisteminin elektriksel sığasını hesaplayınız ve eşdeğer elektrik devresini çiziniz.



Şek. 3

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

Soru 3 numaralandırılmış alt kısımlar içermemektedir. İstenen sırayla:

- **Dıştaki kürenin toprağa göre potansiyeli:**

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V.}$$

- **Sistemin elektriksel sığası:**

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF.}$$

- **Eşdeğer elektrik devresi:** dıştaki küre ile toprak arasına **paralel** bağlanmış iki kondansatör:

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF.}$$

Çözüm

Küçük açıklığın ve bağlantı telinin neden olduğu bozucu etkiyi ihmal ediyor ve toprağı sıfır potansiyeldeki uzak bir iletken olarak ele alıyoruz. Kabuğun kalınlığı ihmal edilebilir olduğundan her iki yüzeyinin yarıçapı da R 'dir.

Dış kabuk elektriksel olarak yalıtılmıştır ve toplam Q yükünü korur. İçteki küre ise toprakla yük alışverişinde bulunabilir.

Dıştaki kürenin potansiyeli.

İçteki kürenin son yükü q olsun. Elektrostatik dengede, kabuğun metal kısmının içindeki elektrik alan sıfırdır. Dolayısıyla bu metalin içinde seçilen bir Gauss yüzeyinin çevrelediği net yük sıfırdır. Sonuç olarak, kabuğun iç yüzeyi $-q$ yükünü taşıırken dış yüzeyinin yükü

$$Q_{\text{outer}} = Q + q$$

olur.

$k = 1/(4\pi\epsilon_0)$ yazalım. Düzgün yüklü bir küresel yüzey, içindeki her noktada sabit kQ/R potansiyeli oluşturur. Böylece içteki kürenin potansiyeli

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right)$$

olur. Küre topraklanmış olduğundan,

$$V_{\text{ball}} = 0 \implies q = -Q \frac{r}{R}.$$

Sayısal olarak,

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

Dolayısıyla kabuğun iç ve dış yüzeylerinin her biri $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ yük taşır.

Kabuktaki potansiyel

$$V = k \frac{Q+q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R-r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

olur. $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ kullanılarak,

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

Sistemin elektriksel sığası.

Sığa, yalıtılmış kabuğa verilen yükün, kabuğun toprağa göre potansiyeline oranıdır:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R-r}.$$

Buna göre

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

Eşdeğer elektrik devresi.

Kabukta depolanan yüke iki katkı vardır.

Aradaki boşlukta bulunan alan, kabuk ile topraklanmış küre arasındaki bir küresel kondansatöre karşılık gelir. Bu kondansatörün potansiyel farkı

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

olduğundan sığası

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R-r}$$

olur.

Dışarıdaki alan, kabuğun dış yüzeyi ile uzaktaki toprak arasındaki bir kondansatöre karşılık gelir.

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

olduğundan bu katkının sığası

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

olur.

Her iki kondansatörün birer ucu ortak olan kabuğa bağlıdır. Diğer uçları olan küre ve toprak, topraklama teliyle birbirine bağlandığından kondansatörler paraleldir:

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R-r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R-r}.$$

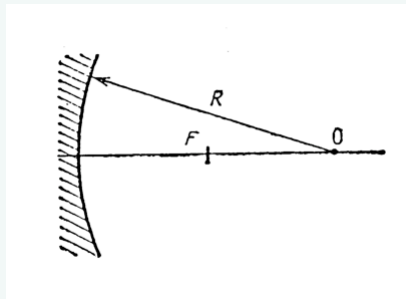
Devreyi çizmek için dış kabuğu temsil eden bir S düğümü işaretleyiniz ve bağlantıyı iki kola ayırınız. Her kola bir kondansatör yerleştirip bunları $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$ ve $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$ olarak etiketleyiniz. Diğer uçlarını toprak simgesi bulunan ortak bir düğümde birleştiriniz. Her kondansatörün uçları arasındaki potansiyel farkı 225 V olup kabuğa bağlı uç pozitifdir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 4: Küresel teleskop aynası ve odağındaki disk biçimli alıcı

Bir teleskopa küresel bir ayna yerleştirilmiştir. Aynanın enine çapı $D = 0,5 \text{ m}$, eğrilik yarıçapı ise $R = 2 \text{ m}$ 'dir. Aynanın asal odağında, dairesel bir disk biçiminde bir ışınım alıcısı bulunmaktadır. Disk, aynanın optik eksenine dik olarak yerleştirilmiştir (Şek. 4). Aynadan yansıyan ışınım akısının tamamını alabilmesi için alıcının yarıçapı r ne olmalıdır? Dedektörün boyutları 8 kat küçültülürse alınan ışınım akısı nasıl azalır?

Yönergeler: 1) Küçük α değerleri ($\alpha \ll 1$) için hesaplama yapılırken $\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$ yerine koyması kullanılabilir; 2) kırınım dikkate alınmamalıdır.



Şek. 4

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Gerekli alıcı yarıçapı:**

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Küçük açıklık açılımı kullanılmadığında geometrik sonuç $2.024 \dots \text{ mm}$ 'dir.

- **Doğrusal boyutlar sekiz kat küçültüldükten sonraki akı:**

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

Alınan akı yaklaşık **4** kat azalır; bu, **%75 kayba** karşılık gelir. Açılım yapılmadan kullanılan ışın geometrisi, alınmaya devam eden akının oranını $0.25449 \dots$ olarak verir.

Çözüm

Gerekli alıcı yarıçapı

Optik eksen üzerinde, paralel ışınlar sağlayan ve aynanın açıklığı boyunca düzgün aydınlanma oluşturan uzak bir kaynak olduğunu varsayalım. Geometrik optiği kullanıyor ve kırınımı ihmal ediyoruz.

Aynanın tepe noktası $z = 0$ 'da, eğrilik merkezi ise $z = R$ 'de olsun. Buna göre paraksial odağı

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

konumundadır. Açıklık yarıçapını

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

olarak yazalım.

Eksenden h yüksekliğinde gelen bir ışını ele alalım. Işının yansıdığı P noktasında normal, eksenle θ açısı yapsın. Küresel yüzeyden

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

bağıntıları elde edilir.

Yansıma yasasına göre, yansıyan ışın eksene doğru 2θ açısıyla ilerler. $z = f$ odak düzlemine ulaştığında işaretli yüksekliği

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

olur. Yukarıdaki ifadeler yerine konulduğunda,

$$\begin{aligned} y_F &= R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta \\ &= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

Negatif işaret, ışının paraksial odak düzlemine ulaşmadan önce eksenini geçmiş olduğunu gösterir: bu, küresel sapmadır.

Dolayısıyla bu düzlemde eksene olan uzaklığı

$$\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2}\right)}{1 - 2h^2/R^2}.$$

olur. Verilen açıklık için h arttıkça pay artarken pozitif olan payda azalır. Dolayısıyla $\rho(h)$ artar ve gerekli disk yarıçapını en dıştaki ışınlar belirler:

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2}\right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

Verilen değerlerle bu yarıçap

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ m.}$$

olur.

İstenen küçük büyüklük yaklaşımını elde etmek için

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

olduğuna dikkat edelim. Verilen açılımı kullanarak,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

Böylece $\rho(h)$ ifadesinde sıfırdan farklı en düşük mertebeli terimi tutmak

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

sonucunu verir. Sonuç olarak,

$$r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ m} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Dedektörün boyutları küçültüldükten sonraki akı

Doğrusal boyutların sekiz kat küçültülmesiyle dedektörün yarıçapı

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

olur.

$\rho(h)$, h ile arttığından, bu daha küçük disk, aynanın açıklığının merkezindeki b yarıçaplı bir bölgeden yansıyan ışınları alır; bu yarıçap

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

bağıntısıyla tanımlanır. Az önce türetilen kübik bağımlılığı kullanarak,

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

dolayısıyla

$$b = \frac{a}{2}.$$

Gelen ışığın düzgün aydınlanma oluşturmaları ve yansıtıcılığın her yerde aynı olması durumunda, yansıyan akı, dedektöre katkıda bulunan **açıklığın izdüşüm alanı** ile orantılıdır. Bu nedenle,

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Böylece alınan akı yaklaşık dört kat azalır.

Karşılaştırma için, $\rho(h)$ 'nin açılım yapılmamış ifadesi kullanıldığında, $\rho(b) = \rho(a)/8$ denklemi $b = 0.126117\dots$ m sonucunu verir ve dolayısıyla

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449\dots,$$

bu da en düşük mertebeli sonuçla tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi. Bu çözümün resmi çözümden ayrıldığı yerlerde resmi çözümde bir hata ya da baskı hatası vardır.