

IPhO 1970

Теоретические задачи и решения · Москва, СССР · 4 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1970/

Задача 1: Тележка с двигателем на бруске, скользящем по столу

Длинный брусок массой $M = 1$ кг помещён на гладкую горизонтальную поверхность стола, по которой он может двигаться без трения. По верхней горизонтальной поверхности бруска может скользить тележка, оснащённая двигателем; масса тележки равна $m = 0.1$ кг. Коэффициент трения тележки о брусок равен $\mu = 0.02$.

Двигатель наматывает нить на вал с постоянной скоростью $v_0 = 0.1$ м/с. Другой конец нити в одном случае привязан к достаточно удалённой неподвижной опоре (рис. 1, а), а в другом — к штырю у края бруска (рис. 1, б). Удерживая брусок неподвижным, дают тележке начать движение со скоростью V_0 , а затем отпускают брусок.

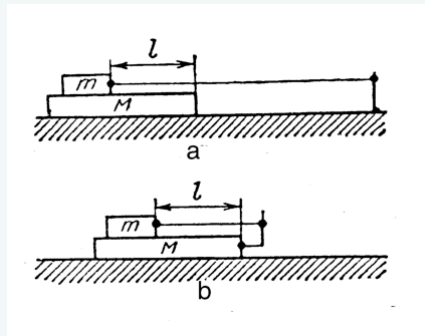


Рис. 1

В момент освобождения бруска передний край тележки находится на расстоянии $l = 0.5$ м от переднего края бруска. Для обоих случаев найдите законы движения бруска и тележки, а также время, за которое тележка достигнет переднего края бруска.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Примем момент освобождения бруска за $t = 0$, а направление вперёд — за положительное. Обозначим через x_b и x_c перемещения бруска и тележки относительно их соответствующих начальных положений. Принимая $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, введём обозначения

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m s}^{-2}, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

- (a) Нить прикреплена к неподвижной опоре:

$$x_c(t) = v_0 t,$$

$$x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

После t_* оба тела движутся со скоростью 0.1 m s^{-1} . **Тележка никогда не достигнет переднего края:** оставшееся расстояние равно

$$d_{\min} = l - \frac{M v_0^2}{2 \mu m g} \approx 0.25 \text{ m}.$$

- (b) Нить прикреплена к бруску:

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

Брусек остаётся в покое, а тележка достигает его переднего края через время

$$t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s}.$$

Решение

Будем считать нить невесомой и нерастяжимой, а v_0 — постоянной линейной скоростью её наматывания. Нить горизонтальна, поэтому сила нормальной реакции, действующая на тележку, равна mg . При скольжении модуль силы трения равен

$$f = \mu mg.$$

Стол не действует на брусек с горизонтальной силой.

До освобождения бруска сам брусек и точка крепления нити неподвижны в обоих случаях.

Следовательно, начальная скорость тележки равна

$$V_0 = v_0.$$

Освобождение бруска не сопровождается импульсом силы, поэтому сразу после освобождения

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

(a) Нить прикреплена к неподвижной опоре

Поскольку дальний конец нити закреплён, её наматывание со скоростью v_0 заставляет тележку приближаться к этому концу с той же скоростью:

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

Вначале тележка скользит вперёд относительно бруска. Сила трения, действующая на тележку, направлена назад, а действующая на брусек — вперёд. Обозначив силу натяжения нити через T , по второму закону Ньютона получаем

$$m \dot{v}_c = T - f = 0, \quad M \dot{v}_b = f.$$

Таким образом, $T = f$, а брусек движется с постоянным ускорением

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

Пока тележка скользит вперёд,

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2}at^2.$$

Относительная скорость равна

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

Она обращается в нуль в момент

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s.}$$

До этого момента перемещение тележки вперёд относительно бруска составляет

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2}at_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

Численно получаем

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m.}$$

Поскольку $s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$, к моменту прекращения относительного движения тележка ещё не достигает края.

В момент t_* оба тела имеют скорость v_0 . Далее они могут продолжать двигаться вместе без действия горизонтальных сил: сила трения и сила натяжения равны нулю. Поэтому в этот момент ускорение, вызванное трением скольжения, должно исчезнуть. При $t \geq t_*$

$$v_b = v_c = v_0,$$

и

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

Расстояние между передними краями равно

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

Его конечное значение составляет приблизительно 0.245 m, поэтому **тележка не достигнет края ни за какое конечное время.**

(b) Нить прикреплена к бруску

В этом случае двигатель уменьшает расстояние между тележкой и точкой, неподвижной относительно бруска. Следовательно,

$$v_c - v_b = v_0.$$

Все горизонтальные силы являются внутренними для системы «брусок — тележка»: нить тянет тележку вперёд, а брусок — назад, тогда как силы трения образуют пару равных по модулю и противоположно направленных сил, действующих в обратных направлениях. Поэтому суммарный горизонтальный импульс сохраняется:

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

где правая часть равна импульсу системы в момент освобождения бруска.

Подставляя $v_c = v_b + v_0$, получаем

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

откуда

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

Таким образом,

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

Сила натяжения равна силе трения скольжения, $T = \mu mg$, поэтому равнодействующая сил, действующих на каждое тело, равна нулю.

Расстояние между передними краями равномерно уменьшается:

$$d(t) = l - v_0 t.$$

Полагая $d = 0$, получаем

$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Масса атома водорода по элементарной ячейке NaCl

Элементарная ячейка кристалла хлорида натрия (поваренной соли — NaCl) представляет собой куб с длиной ребра $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (рис. 2). Чёрные кружки на рисунке обозначают положения атомов натрия, а белые — атомов хлора. Весь кристалл поваренной соли образован повторением таких элементарных ячеек. Относительная атомная масса натрия равна 23, а хлора — 35,5. Плотность поваренной соли $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Найдите массу атома водорода.

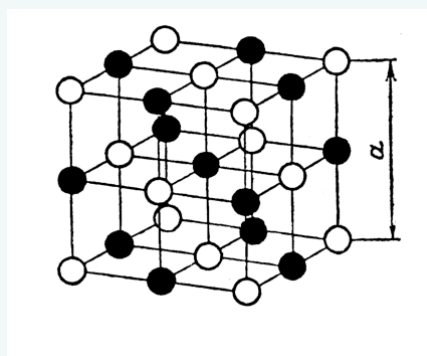


Рис. 2

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 2.** $m_{\text{H}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, или $\boxed{1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}}$ с двумя значащими цифрами.

Решение

Задача 2.

Масса, приходящаяся на одну элементарную ячейку, равна произведению её объёма на плотность кристалла:

$$M_{\text{ячейки}} = \rho a^3.$$

Чтобы подсчитать число атомов, принадлежащих одной ячейке, учтём, что некоторые атомы являются общими для соседних ячеек. Атом в вершине куба принадлежит восьми ячейкам, атом в середине ребра — четырём, а атом в центре грани — двум. Атом внутри куба целиком принадлежит данной ячейке.

Белые кружки обозначают атомы хлора в восьми вершинах и центрах шести граней. Число атомов хлора, приходящихся на одну ячейку, равно

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

Чёрные кружки обозначают атомы натрия в серединах двенадцати рёбер и в центре куба:

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

Таким образом, каждая элементарная ячейка содержит четыре формульные единицы NaCl.

При требуемой в этой задаче точности примем относительную атомную массу водорода равной 1 и пренебрежём изменениями массы, обусловленными образованием химических связей. Тогда из заданных относительных атомных масс следует

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_{\text{H}}, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_{\text{H}}.$$

Следовательно,

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_{\text{H}} = 234m_{\text{H}}.$$

Выражая массу атома водорода, получаем

$$m_{\text{H}} \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Поскольку длина ребра задана с двумя значащими цифрами,

$$\boxed{m_{\text{H}} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}}.$$

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Заземлённый металлический шар внутри заряженной

сферической оболочки

Внутри тонкостенной металлической сферы радиусом $R = 20$ см находится металлический шар радиусом $r = 10$ см, имеющий со сферой общий центр. Шар соединён с Землёй очень длинным проводом, проходящим через отверстие в сфере (рис. 3). Внешней сфере сообщён заряд $Q = 10^{-8}$ С. Вычислите потенциал этой сферы, электрическую ёмкость полученной системы проводящих тел и изобразите эквивалентную электрическую схему.

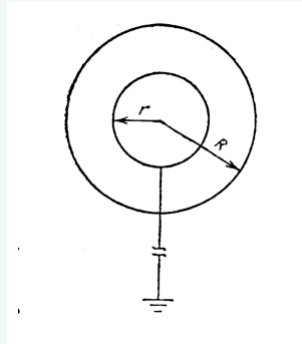


Рис. 3

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

Задача 3 не содержит пронумерованных подпунктов. В порядке, указанном в условии:

- **Потенциал внешней сферы относительно Земли:**

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V}.$$

- **Электрическая ёмкость системы:**

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}.$$

- **Эквивалентная электрическая схема:** два конденсатора, соединённых параллельно между внешней сферой и Землёй:

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 rR}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF}.$$

Решение

Пренебрежём искажением поля, вызванным небольшим отверстием и соединительным проводом, и будем считать Землю удалённым проводником с нулевым потенциалом. Толщина оболочки пренебрежимо мала, поэтому обе её поверхности имеют радиус R .

Внешняя оболочка электрически изолирована и сохраняет полный заряд Q . Внутренний шар, однако, может обмениваться зарядом с Землёй.

Потенциал внешней сферы.

Пусть установившийся заряд внутреннего шара равен q . В состоянии электростатического равновесия электрическое поле внутри металла оболочки равно нулю. Поэтому суммарный заряд, заключённый внутри гауссовой поверхности, проходящей в толще металла, равен нулю. Следовательно, внутренняя поверхность оболочки несёт заряд $-q$, а её внешняя поверхность — заряд

$$Q_{\text{outer}} = Q + q.$$

Обозначим $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Равномерно заряженная сферическая поверхность создаёт во всех точках внутри неё постоянный потенциал kQ/R . Поэтому потенциал внутреннего шара равен

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Поскольку шар заземлён,

$$V_{\text{ball}} = 0 \implies q = -Q \frac{r}{R}.$$

Численно получаем

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

Таким образом, внутренняя и внешняя поверхности оболочки несут заряд по $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$ каждая.

Потенциал оболочки равен

$$V = k \frac{Q + q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Используя $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$, получаем

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

Электрическая ёмкость системы.

Электрическая ёмкость равна отношению заряда, сообщённого изолированной оболочке, к её потенциалу относительно Земли:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R - r}.$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

Эквивалентная электрическая схема.

Заряд, накопленный на оболочке, складывается из двух составляющих.

Поле в зазоре соответствует сферическому конденсатору, образованному оболочкой и заземлённым шаром. Разность потенциалов между его обкладками равна

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

поэтому его ёмкость равна

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r}.$$

Внешнее поле соответствует конденсатору, образованному внешней поверхностью оболочки и удалённой Землёй. Поскольку

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

этой составляющей соответствует ёмкость

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

У обоих конденсаторов одна обкладка общая — оболочка. Их другие обкладки — шар и Земля — соединены заземляющим проводом, поэтому конденсаторы соединены параллельно:

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R - r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r}.$$

Чтобы изобразить схему, обозначьте узел S , соответствующий внешней оболочке, и проведите от него две ветви. В каждую ветвь включите по одному конденсатору, обозначив их $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$ и $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$. Соедините их другие выводы в общем узле со знаком заземления. Разность потенциалов на каждом конденсаторе равна 225 V , причём вывод, соответствующий оболочке, положителен.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 4: Сферическое зеркало телескопа и дисковый приёмник в его фокусе

В телескопе установлено сферическое зеркало. Его поперечный диаметр равен $D = 0,5 \text{ m}$, а радиус кривизны — $R = 2 \text{ m}$. В главном фокусе зеркала находится приёмник излучения в форме круглого диска. Диск расположен перпендикулярно оптической оси зеркала (рис. 4). Каким должен быть радиус r приёмника, чтобы он мог принимать весь поток излучения, отражённого зеркалом? Во сколько раз уменьшится принимаемый поток излучения, если размеры приёмника уменьшить в 8 раз?

Указания: 1) При вычислениях с малыми величинами α ($\alpha \ll 1$) можно использовать приближение $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$; 2) дифракцию учитывать не следует.

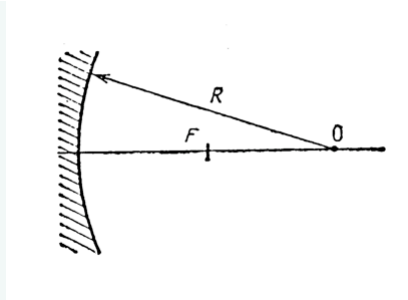


Рис. 4

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Необходимый радиус приёмника:**

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Без разложения по малому размеру апертуры геометрический расчёт даёт 2.024... mm.

- **Поток после восьмикратного уменьшения линейных размеров:**

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

Принимаемый поток уменьшается приблизительно в **4** раза, что соответствует **потере 75%**. Геометрический расчёт хода лучей без разложения даёт долю сохранившегося потока 0.25449...

Решение

Необходимый радиус приёмника

Предположим, что удалённый источник находится на оптической оси и создаёт параллельный пучок лучей, равномерно освещающий апертуру зеркала. Используем геометрическую оптику и пренебрежём дифракцией.

Пусть вершина зеркала находится в точке $z = 0$, а центр его кривизны — в точке $z = R$. Тогда его парааксиальный фокус находится в точке

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

Обозначим радиус апертуры через

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

Рассмотрим падающий луч на высоте h над осью. Пусть в точке его отражения P нормаль образует с осью угол θ . Из геометрии сферической поверхности следует

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

По закону отражения отражённый луч направляется к оси под углом 2θ . Его высота с учётом знака при достижении фокальной плоскости $z = f$ равна

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

Подставляя приведённые выше выражения, получаем

$$\begin{aligned} y_F &= R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta \\ &= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

Отрицательный знак означает, что луч пересёк ось ещё до достижения параксиальной фокальной плоскости: это сферическая аберрация.

Таким образом, расстояние луча от оси в этой плоскости равно

$$\boxed{\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2} \right)}{1 - 2h^2/R^2}}.$$

Для данной апертуры числитель возрастает с ростом h , а положительный знаменатель уменьшается. Следовательно, $\rho(h)$ возрастает, и необходимый радиус диска определяется крайними лучами:

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2} \right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

При заданных значениях получаем

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ м.}$$

Чтобы получить требуемое приближение по малому параметру, заметим, что

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

Используя указанное в условии разложение, получаем

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

Поэтому, сохраняя в $\rho(h)$ первый ненулевой член, получаем

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

Следовательно,

$$\boxed{r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ м} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ м} \approx 2.0 \text{ мм.}}$$

Поток после уменьшения размеров приёмника

При восьмикратном уменьшении линейных размеров радиус приёмника становится равным

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

Поскольку $\rho(h)$ возрастает с ростом h , этот меньший диск принимает лучи, отражённые от центральной части апертуры зеркала радиуса b , определяемого условием

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

Используя только что полученную кубическую зависимость, находим

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

откуда

$$b = \frac{a}{2}.$$

При равномерном падающем освещении и одинаковом по всей поверхности коэффициенте отражения отражённый поток пропорционален **площади проекции той части апертуры**, лучи от которой попадают на приёмник. Поэтому

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, принимаемый поток уменьшается приблизительно в четыре раза.

Для сравнения, при использовании выражения для $\rho(h)$ без разложения уравнение $\rho(b) = \rho(a)/8$ даёт $b = 0.126117 \dots m$, и, следовательно,

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449 \dots,$$

что согласуется с результатом в главном порядке приближения.

Решение проверено по официальному решению. Там, где это решение расходится с официальным, в официальном решении есть ошибка или опечатка.