

IPhO 1970

Problemas teóricos y soluciones · Moscú, URSS · 4 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1970/

Problema 1: Carrito accionado por un motor sobre una barra que se desliza sobre una mesa

Una barra larga de masa $M = 1 \text{ kg}$ está colocada sobre la superficie horizontal lisa de una mesa, sobre la que puede moverse sin rozamiento. Un carrito equipado con un motor puede deslizarse por la cara superior horizontal de la barra; la masa del carrito es $m = 0.1 \text{ kg}$. El coeficiente de rozamiento del carrito es $\mu = 0.02$.

El motor enrolla un hilo alrededor de un eje a una velocidad constante $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$. En un caso, el otro extremo del hilo está atado a un soporte fijo bastante distante (Fig.1, a), mientras que, en el otro caso, está sujeto a una espiga situada en el extremo de la barra (Fig.1, b). Manteniendo fija la barra, se deja que el carrito comience a moverse a la velocidad V_0 y, a continuación, se libera la barra.

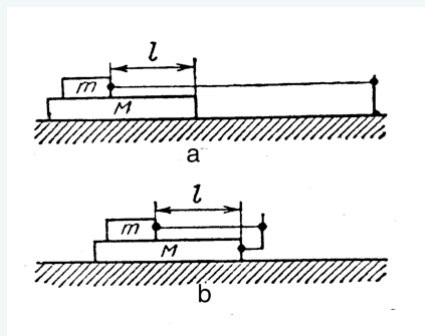


Fig. 1

En el momento en que se libera la barra, el borde delantero del carrito se encuentra a una distancia $l = 0.5 \text{ m}$ del borde delantero de la barra. Para ambos casos, determine las leyes del movimiento de la barra y del carrito, así como el tiempo que tardará el carrito en alcanzar el borde delantero de la barra.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

Tómese $t = 0$ en el instante de la liberación y el sentido hacia delante como positivo. Sean x_b y x_c los desplazamientos de la barra y del carrito respecto a sus respectivas posiciones iniciales. Utilizando $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, se define

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m s}^{-2}, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

- (a) Hilo sujeto al soporte fijo:

$$x_c(t) = v_0 t,$$

$$x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

Después de t_* , ambos cuerpos se mueven a 0.1 m s^{-1} . **El carrito nunca alcanza el borde delantero:** la distancia restante es

$$d_{\min} = l - \frac{M v_0^2}{2 \mu m g} \approx 0.25 \text{ m}.$$

- (b) Hilo sujeto a la barra:

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

La barra permanece en reposo, y el carrito alcanza el borde delantero de la barra al cabo de

$$t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s}.$$

Solución

Considérese el hilo sin masa e inextensible, e interprétese v_0 como su velocidad lineal constante de enrollamiento. El hilo es horizontal, por lo que la fuerza normal sobre el carrito es mg . Durante el deslizamiento, la fuerza de rozamiento tiene un módulo

$$f = \mu mg.$$

La mesa no ejerce ninguna fuerza horizontal sobre la barra.

Antes de la liberación, la barra y el punto de sujeción del hilo están en reposo en ambas configuraciones. Por consiguiente, la velocidad inicial del carrito es

$$V_0 = v_0.$$

Al retirar la sujeción no se produce ningún impulso, de modo que, inmediatamente después de la liberación,

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

(a) Hilo sujeto al soporte fijo

Como el extremo lejano del hilo está fijo, enrollarlo a la velocidad v_0 hace que el carrito se acerque a ese extremo a la misma velocidad:

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

Inicialmente, el carrito se desliza hacia delante respecto a la barra. El rozamiento actúa hacia atrás sobre el carrito y hacia delante sobre la barra. Si T es la tensión del hilo, la segunda ley de Newton da

$$m \dot{v}_c = T - f = 0, \quad M \dot{v}_b = f.$$

Por tanto, $T = f$, y la barra tiene una aceleración constante

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu mg}{M}.$$

Mientras el carrito se desliza hacia delante,

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2}at^2.$$

La velocidad relativa es

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

Se anula en

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s.}$$

El desplazamiento del carrito hacia delante respecto a la barra hasta este instante es

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2}at_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

Numéricamente,

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m.}$$

Como $s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$, el carrito no ha alcanzado el borde cuando cesa el movimiento relativo.

En t_* , ambos cuerpos tienen la velocidad v_0 . A partir de entonces pueden continuar moviéndose juntos sin fuerzas horizontales: tanto el rozamiento como la tensión son nulos. Por tanto, la aceleración debida al rozamiento por deslizamiento debe cesar en este instante. Para $t \geq t_*$,

$$v_b = v_c = v_0,$$

y

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

La separación entre los bordes delanteros es

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

Su valor final es aproximadamente 0.245 m, por lo que **no existe un tiempo de llegada finito**.

(b) Hilo sujeto a la barra

En este caso, el motor reduce la distancia entre el carrito y un punto fijo de la barra. Por tanto,

$$v_c - v_b = v_0.$$

Todas las fuerzas horizontales son internas al sistema formado por la barra y el carrito: el hilo tira del carrito hacia delante y de la barra hacia atrás, mientras que el rozamiento ejerce un par de fuerzas de igual módulo y sentidos opuestos en los sentidos contrarios. Por ello, se conserva la cantidad de movimiento horizontal total:

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

donde el miembro derecho es la cantidad de movimiento en el instante de la liberación.

Sustituyendo $v_c = v_b + v_0$,

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

por lo que

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

Así,

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

La tensión es igual al rozamiento por deslizamiento, $T = \mu mg$, de modo que la fuerza resultante sobre cada cuerpo es nula.

La separación entre los bordes delanteros disminuye uniformemente:

$$d(t) = l - v_0 t.$$

Al imponer $d = 0$, se obtiene

$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Masa del átomo de hidrógeno a partir de la celda unidad del NaCl

Una celda unidad de un cristal de cloruro de sodio (sal común, NaCl) es un cubo cuya arista tiene una longitud de $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (Fig.2). Los círculos negros de la figura indican las posiciones de los átomos de sodio, mientras que los blancos corresponden a los átomos de cloro. El cristal completo de sal común está formado por la repetición de estas celdas unidad. La masa atómica relativa del sodio es 23 y la del cloro es 35,5. La densidad de la sal común es $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Halle la masa de un átomo de hidrógeno.

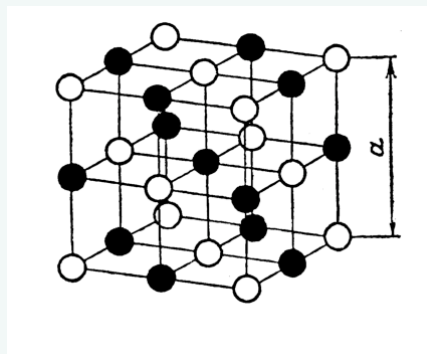


Fig. 2

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2.** $m_{\text{H}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, o $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ con dos cifras significativas.

Solución

Problema 2.

La masa asignada a una celda unidad es su volumen multiplicado por la densidad del cristal:

$$M_{\text{celda}} = \rho a^3.$$

Para contar los átomos que pertenecen a una celda, tenemos en cuenta que se comparten entre celdas vecinas. Un átomo situado en un vértice pertenece a ocho celdas; uno situado en el punto medio de una arista, a cuatro; y uno situado en el centro de una cara, a dos. Un átomo situado en el interior del cubo pertenece por completo a esa celda.

Los círculos blancos representan átomos de cloro situados en los ocho vértices y en los centros de las seis caras. Su número efectivo por celda es

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

Los círculos negros representan átomos de sodio situados en los puntos medios de las doce aristas y en el centro del cubo:

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

Por tanto, cada celda unidad contiene cuatro unidades fórmula de NaCl.

Con la precisión que se pretende alcanzar aquí, tomamos la masa atómica relativa del hidrógeno como 1 y despreciamos los cambios de masa debidos al enlace químico. Las masas atómicas relativas dadas implican entonces

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_{\text{H}}, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_{\text{H}}.$$

En consecuencia,

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_{\text{H}} = 234m_{\text{H}}.$$

Al despejar la masa del átomo de hidrógeno, se obtiene

$$m_{\text{H}} \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Como la longitud de la arista se da con dos cifras significativas,

$$\boxed{m_{\text{H}} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Bola metálica conectada a tierra dentro de una envoltura esférica cargada

En el interior de una esfera metálica de pared delgada y radio $R = 20 \text{ cm}$ hay una bola metálica de radio $r = 10 \text{ cm}$ concéntrica con la esfera. La bola está conectada a tierra mediante un hilo conductor muy largo que pasa por una abertura en la esfera (Fig. 3). Se deposita una carga

$Q = 10^{-8} \text{ C}$ sobre la esfera exterior. Calcule el potencial de esta esfera y la capacidad eléctrica del sistema de cuerpos conductores resultante, y dibuje un esquema eléctrico equivalente.

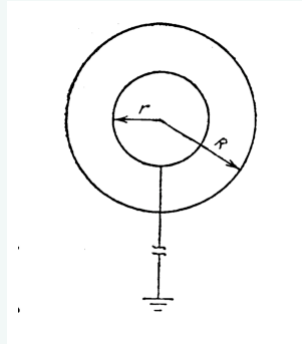


Fig. 3

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

El **Problema 3** no tiene apartados numerados. En el orden solicitado:

- **Potencial de la esfera exterior respecto a tierra:**

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V.}$$

- **Capacidad eléctrica del sistema:**

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF.}$$

- **Esquema eléctrico equivalente:** dos condensadores conectados **en paralelo** entre la esfera exterior y tierra:

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 rR}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF.}$$

Solución

Despreciamos la perturbación causada por la pequeña abertura y el hilo de conexión, y consideramos la Tierra como un conductor lejano a potencial cero. El espesor de la envoltura es despreciable, por lo que ambas superficies tienen radio R .

La envoltura exterior está eléctricamente aislada y conserva una carga total Q . La bola interior, en cambio, puede intercambiar carga con la Tierra.

Potencial de la esfera exterior.

Sea q la carga final de la bola interior. En equilibrio electrostático, el campo eléctrico en el interior del metal de la envoltura es nulo. Por tanto, una superficie gaussiana situada dentro de ese metal encierra una carga neta nula. En consecuencia, la superficie interior de la envoltura tiene una carga $-q$, y su superficie exterior tiene una carga

$$Q_{\text{outer}} = Q + q.$$

Escribamos $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Una superficie esférica uniformemente cargada produce un potencial constante kQ/R en todos los puntos de su interior. Así, el potencial de la bola interior es

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Como la bola está conectada a tierra,

$$V_{\text{ball}} = 0 \implies q = -Q \frac{r}{R}.$$

Numéricamente,

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

Por tanto, las superficies interior y exterior de la envoltura tienen, cada una, una carga de $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$.

En la envoltura, el potencial es

$$V = k \frac{Q + q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Utilizando $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$,

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

Capacidad eléctrica del sistema.

La capacidad es la carga depositada sobre la envoltura aislada dividida por su potencial respecto a tierra:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R - r}.$$

Por tanto,

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

Esquema eléctrico equivalente.

Hay dos contribuciones a la carga almacenada en la envoltura.

El campo en el espacio entre la envoltura y la bola corresponde a un condensador esférico formado por la envoltura y la bola conectada a tierra. Su diferencia de potencial es

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

por lo que su capacidad es

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r}.$$

El campo exterior corresponde a un condensador entre la superficie exterior de la envoltura y la Tierra lejana. Puesto que

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

esta contribución tiene una capacidad

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Ambos condensadores comparten la envoltura como uno de sus terminales. Sus otros terminales —la bola y la Tierra— están conectados mediante el hilo de puesta a tierra, por lo que están en paralelo:

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R-r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R-r}.$$

Para dibujar el esquema, marque un nodo S para la envoltura exterior y divida la conexión en dos ramas. Coloque un condensador en cada rama, etiquetados como $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$ y $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$. Una sus otros extremos en un nodo común con un símbolo de tierra. La diferencia de potencial entre los terminales de cada condensador es 225 V , siendo positivo el terminal de la envoltura.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 4: Espejo esférico de un telescopio y un receptor en forma de disco en su foco

En un telescopio se instala un espejo esférico. Su diámetro transversal es $D = 0,5 \text{ m}$ y su radio de curvatura es $R = 2 \text{ m}$. En el foco principal del espejo se encuentra un receptor de radiación en forma de disco circular. El disco está colocado perpendicularmente al eje óptico del espejo (Fig. 4). ¿Cuál debe ser el radio r del receptor para que pueda recibir todo el flujo de radiación reflejado por el espejo? ¿Cómo disminuiría el flujo de radiación recibido si las dimensiones del detector se redujeran a la octava parte?

Indicaciones: 1) Al realizar cálculos con valores pequeños de α ($\alpha \ll 1$), puede utilizarse la sustitución $\sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$; 2) no debe tenerse en cuenta la difracción.

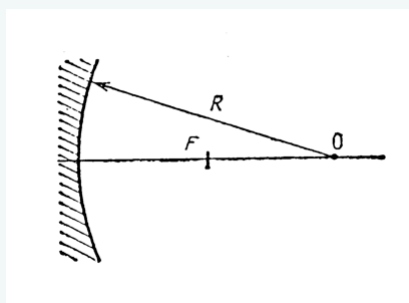


Fig. 4

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Radio necesario del receptor:**

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Sin utilizar el desarrollo para una abertura pequeña, el resultado geométrico es $2.024 \dots \text{ mm}$.

- **Flujo tras reducir las dimensiones lineales a la octava parte:**

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

El flujo recibido disminuye aproximadamente en un factor de **4**, lo que corresponde a una **pérdida del 75%**. La geometría de los rayos sin recurrir al desarrollo da una fracción recibida de $0.25449 \dots$

Solución

Radio necesario del receptor

Supongamos una fuente lejana situada sobre el eje óptico, que proporciona rayos paralelos y una iluminación uniforme en toda la abertura del espejo. Utilizamos la óptica geométrica y despreciamos la difracción.

Situemos el vértice del espejo en $z = 0$, con su centro de curvatura en $z = R$. Su foco paraxial se encuentra, por tanto, en

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

Denotemos el radio de la abertura por

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

Consideremos un rayo incidente a una altura h por encima del eje. En su punto de reflexión P , sea θ el ángulo que forma la normal con el eje. La superficie esférica proporciona

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

Por la ley de la reflexión, el rayo reflejado se dirige hacia el eje formando un ángulo 2θ . Su altura con signo al alcanzar el plano focal $z = f$ es

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

Sustituyendo las expresiones anteriores,

$$\begin{aligned} y_F &= R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta \\ &= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

El signo negativo significa que el rayo ya ha cruzado el eje antes de alcanzar el plano focal paraxial: se trata de la aberración esférica.

Por tanto, su distancia al eje en ese plano es

$$\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2}\right)}{1 - 2h^2/R^2}.$$

Para la abertura considerada, el numerador aumenta con h , mientras que el denominador positivo disminuye. Por ello, $\rho(h)$ aumenta, y los rayos más externos determinan el radio necesario del disco:

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2}\right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

Con los valores dados, se obtiene

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

Para obtener la aproximación solicitada para cantidades pequeñas, observemos que

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

Utilizando el desarrollo proporcionado,

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

Al conservar el término no nulo de menor orden en $\rho(h)$, se obtiene, por tanto,

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

En consecuencia,

$$r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ m} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 2.0 \text{ mm}.$$

Flujo tras reducir las dimensiones del detector

Al reducir las dimensiones lineales a la octava parte, el radio del detector pasa a ser

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

Como $\rho(h)$ aumenta con h , este disco más pequeño recibe los rayos reflejados por una porción central de la abertura del espejo, de radio b , definido por

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

Utilizando la dependencia cúbica que acabamos de deducir,

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

de modo que

$$b = \frac{a}{2}.$$

Para una iluminación incidente uniforme y una reflectividad uniforme, el flujo reflejado es proporcional al **área proyectada de la abertura** que contribuye al detector. Por tanto,

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Así pues, el flujo recibido se reduce aproximadamente a la cuarta parte.

A modo de comparación, utilizando la expresión de $\rho(h)$ sin desarrollar, la ecuación $\rho(b) = \rho(a)/8$ da $b = 0.126117 \dots$ m, y, por tanto,

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449 \dots,$$

en concordancia con el resultado de orden dominante.

La solución se comprobó con la solución oficial. Donde esta solución difiere de la solución oficial, la solución oficial contiene un error o una errata.