

IPhO 1970

Theorieaufgaben und Lösungen · Moskau, UdSSR · 4 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1970/

Aufgabe 1: Motorbetriebener Wagen auf einem auf einem Tisch gleitenden Stab

Ein langer Stab mit der Masse $M = 1 \text{ kg}$ liegt auf einer glatten horizontalen Tischoberfläche, auf der er sich reibungsfrei bewegen kann. Ein mit einem Motor ausgestatteter Wagen kann auf der oberen horizontalen Fläche des Stabes gleiten; die Masse des Wagens beträgt $m = 0.1 \text{ kg}$. Der Reibungskoeffizient des Wagens beträgt $\mu = 0.02$.

Der Motor wickelt einen Faden mit einer konstanten Geschwindigkeit $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$ auf eine Welle auf. Das andere Ende des Fadens ist im einen Fall an einer weit entfernten ortsfesten Halterung befestigt (Abb. 1, a), während es im anderen Fall an einem Pfosten am Rand des Stabes befestigt ist (Abb. 1, b). Während man den Stab festhält, lässt man den Wagen auf die Geschwindigkeit V_0 kommen; anschließend wird der Stab losgelassen.

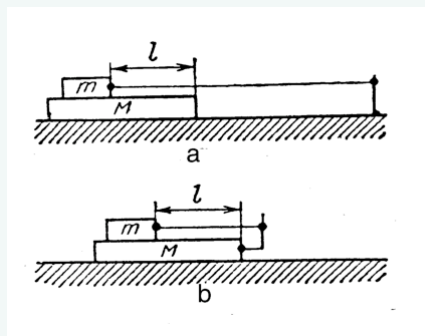


Abb. 1

Zum Zeitpunkt des Loslassens befindet sich die Vorderkante des Wagens im Abstand $l = 0.5 \text{ m}$ von der Vorderkante des Stabes. Bestimmen Sie für beide Fälle die Bewegungsgesetze sowohl des Stabes als auch des Wagens und die Zeit, nach der der Wagen die Vorderkante des Stabes erreicht.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Wählen wir den Zeitpunkt des Loslassens als $t = 0$ und die Vorwärtsrichtung als positive Richtung. Mit x_b und x_c bezeichnen wir die Verschiebungen des Stabes bzw. des Wagens gegenüber ihren jeweiligen Anfangspositionen. Mit $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ definieren wir

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m s}^{-2}, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

- (a) Faden an der ortsfesten Halterung befestigt:

$$x_c(t) = v_0 t,$$

$$x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

Nach t_* bewegen sich beide Körper mit 0.1 m s^{-1} . **Der Wagen erreicht die Vorderkante niemals:** Der verbleibende Abstand beträgt

$$d_{\min} = l - \frac{M v_0^2}{2 \mu m g} \approx 0.25 \text{ m}.$$

- (b) Faden am Stab befestigt:

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

Der Stab bleibt in Ruhe, und der Wagen erreicht dessen Vorderkante nach

$$t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s}.$$

Lösung

Wir betrachten den Faden als masselos und undeformierbar und verstehen unter v_0 seine konstante lineare Aufwickelgeschwindigkeit. Der Faden verläuft horizontal, sodass die Normalkraft auf den Wagen mg beträgt. Während des Gleitens hat die Reibungskraft den Betrag

$$f = \mu m g.$$

Der Tisch übt keine horizontale Kraft auf den Stab aus.

Vor dem Loslassen ruhen in beiden Anordnungen sowohl der Stab als auch der Befestigungspunkt des Fadens. Daher beträgt die Anfangsgeschwindigkeit des Wagens

$$V_0 = v_0.$$

Das Loslassen bewirkt keinen Kraftstoß, sodass unmittelbar danach gilt:

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

(a) Faden an der ortsfesten Halterung befestigt

Da das entfernte Ende des Fadens festgehalten wird, nähert sich der Wagen beim Aufwickeln mit der Geschwindigkeit v_0 diesem Ende mit derselben Geschwindigkeit:

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

Anfangs gleitet der Wagen relativ zum Stab nach vorn. Die Reibung wirkt auf den Wagen nach hinten und auf den Stab nach vorn. Bezeichnet T die Fadenspannung, so liefert das zweite Newtonsche Gesetz

$$m \dot{v}_c = T - f = 0, \quad M \dot{v}_b = f.$$

Somit gilt $T = f$, und der Stab erfährt die konstante Beschleunigung

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu m g}{M}.$$

Solange der Wagen nach vorn gleitet, gilt

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2}at^2.$$

Die Relativgeschwindigkeit beträgt

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

Sie verschwindet zum Zeitpunkt

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s.}$$

Die Verschiebung des Wagens nach vorn relativ zum Stab bis zu diesem Zeitpunkt beträgt

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2}at_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

Numerisch ergibt sich

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m.}$$

Da $s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$, hat der Wagen die Kante noch nicht erreicht, wenn die Relativbewegung zum Stillstand kommt.

Zum Zeitpunkt t_* haben beide Körper die Geschwindigkeit v_0 . Danach können sie sich ohne horizontale Kräfte gemeinsam weiterbewegen: Sowohl die Reibungskraft als auch die Fadenspannung sind null. Die durch die Gleitreibung verursachte Beschleunigung muss daher zu diesem Zeitpunkt aufhören. Für $t \geq t_*$ gilt

$$v_b = v_c = v_0,$$

und

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

Der Abstand zwischen den Vorderkanten beträgt

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2}at^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

Sein Endwert beträgt ungefähr 0.245 m, sodass **es keine endliche Ankunftszeit gibt**.

(b) Faden am Stab befestigt

Hier verkürzt der Motor den Abstand zwischen dem Wagen und einem am Stab befestigten Punkt. Daher gilt

$$v_c - v_b = v_0.$$

Alle horizontalen Kräfte sind innere Kräfte des Systems aus Stab und Wagen: Der Faden zieht den Wagen nach vorn und den Stab nach hinten, während die Reibung ein gleich großes, entgegengesetzt gerichtetes Kräftepaar in den jeweils anderen Richtungen bewirkt. Daher bleibt der gesamte horizontale Impuls erhalten:

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

wobei die rechte Seite den Impuls zum Zeitpunkt des Loslassens angibt.

Einsetzen von $v_c = v_b + v_0$ ergibt

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

also

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

Somit gilt

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

Die Fadenspannung ist gleich der Gleitreibungskraft, $T = \mu mg$, sodass die resultierende Kraft auf jeden Körper null ist.

Der Abstand zwischen den Vorderkanten nimmt gleichmäßig ab:

$$d(t) = l - v_0 t.$$

Setzen wir $d = 0$, so erhalten wir

$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s.}$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Masse des Wasserstoffatoms aus der NaCl-Elementarzelle

Eine Elementarzelle eines Natriumchloridkristalls (Kochsalz – NaCl) ist ein Würfel mit der Kantenlänge $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (Abb. 2). Die schwarzen Kreise in der Abbildung kennzeichnen die Positionen der Natriumatome, während die weißen Kreise Chloratome darstellen. Der gesamte Kochsalzkristall ergibt sich durch Wiederholung solcher Elementarzellen. Die relative Atommasse von Natrium beträgt 23 und die von Chlor 35,5. Die Dichte von Kochsalz beträgt $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Bestimmen Sie die Masse eines Wasserstoffatoms.

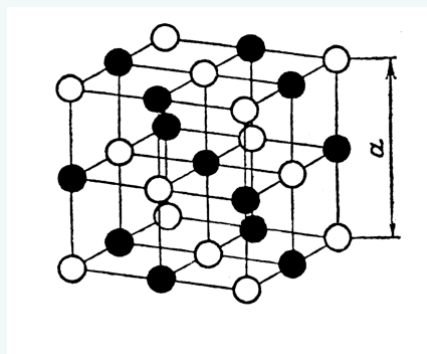


Abb. 2

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 2.** $m_{\text{H}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, oder auf zwei signifikante Stellen gerundet $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$.

Lösung

Aufgabe 2.

Die einer Elementarzelle zugeordnete Masse ist das Produkt aus ihrem Volumen und der Kristalldichte:

$$M_{\text{Zelle}} = \rho a^3.$$

Um die zu einer Zelle gehörenden Atome zu zählen, berücksichtigen wir, dass sie von benachbarten Zellen gemeinsam genutzt werden. Ein Atom an einer Ecke gehört zu acht Zellen, eines in der Mitte einer Kante zu vier und eines in der Mitte einer Fläche zu zwei. Ein Atom im Inneren des Würfels gehört vollständig zu dieser Zelle.

Die weißen Kreise stellen Chloratome an den acht Ecken und den sechs Flächenmittelpunkten dar. Ihre effektive Anzahl pro Zelle beträgt

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

Die schwarzen Kreise stellen Natriumatome an den zwölf Kantenmittelpunkten und im Würfelzentrum dar:

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

Somit enthält jede Elementarzelle vier NaCl-Formeleinheiten.

Für die hier angestrebte Genauigkeit setzen wir die relative Atommasse von Wasserstoff gleich 1 und vernachlässigen Massenänderungen durch chemische Bindung. Aus den angegebenen relativen Atommassen folgt dann

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_{\text{H}}, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_{\text{H}}.$$

Folglich gilt

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_{\text{H}} = 234m_{\text{H}}.$$

Auflösen nach der Masse des Wasserstoffatoms ergibt

$$m_{\text{H}} \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Da die Kantenlänge mit zwei signifikanten Stellen angegeben ist, gilt

$$m_{\text{H}} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Geerdete Metallkugel im Inneren einer geladenen Kugelschale

Im Inneren einer dünnwandigen Metallhohlkugel mit dem Radius $R = 20 \text{ cm}$ befindet sich eine Metallkugel mit dem Radius $r = 10 \text{ cm}$, die denselben Mittelpunkt wie die Hohlkugel hat. Die Kugel ist durch einen sehr langen Draht, der durch eine Öffnung in der Hohlkugel führt, mit der Erde verbunden (Abb. 3). Auf die äußere Hohlkugel wird eine Ladung $Q = 10^{-8} \text{ C}$ aufgebracht. Berechnen Sie das Potential dieser Hohlkugel und die elektrische Kapazität des entstandenen Systems leitender Körper und zeichnen Sie ein elektrisches Ersatzschaltbild.

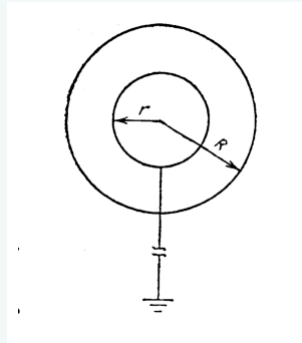


Abb. 3

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

Aufgabe 3 hat keine nummerierten Teilaufgaben. In der geforderten Reihenfolge:

- **Potential der äußeren Hohlkugel gegenüber Erde:**

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V.}$$

- **Elektrische Kapazität des Systems:**

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF.}$$

- **Elektrisches Ersatzschaltbild:** zwei **parallel** geschaltete Kondensatoren zwischen der äußeren Hohlkugel und Erde:

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF.}$$

Lösung

Wir vernachlässigen die durch die kleine Öffnung und den Verbindungsdraht verursachte Störung und behandeln die Erde als weit entfernten Leiter auf dem Potential null. Die Wanddicke der Kugelschale ist vernachlässigbar, sodass ihre beiden Oberflächen den Radius R haben.

Die äußere Kugelschale ist elektrisch isoliert und behält die Gesamtladung Q . Die innere Kugel hingegen kann Ladung mit der Erde austauschen.

Potential der äußeren Hohlkugel.

Die endgültige Ladung auf der inneren Kugel sei q . Im elektrostatischen Gleichgewicht verschwindet das elektrische Feld im Metall der Kugelschale. Eine gaußsche Fläche innerhalb dieses Metalls umschließt daher die Nettoladung null. Folglich trägt die Innenfläche der Kugelschale die Ladung $-q$, und ihre Außenfläche trägt die Ladung

$$Q_{\text{outer}} = Q + q.$$

Wir setzen $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. Eine gleichmäßig geladene Kugeloberfläche erzeugt überall in ihrem Inneren das konstante Potential kQ/R . Somit ist das Potential der inneren Kugel

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

Da die Kugel geerdet ist, gilt

$$V_{\text{ball}} = 0 \quad \implies \quad q = -Q \frac{r}{R}.$$

Numerisch ergibt sich

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

Die Innen- und die Außenfläche der Kugelschale tragen daher jeweils $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$.

An der Kugelschale beträgt das Potential

$$V = k \frac{Q + q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Mit $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ ergibt sich

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

Elektrische Kapazität des Systems.

Die Kapazität ist die auf die isolierte Kugelschale aufgebrachte Ladung, geteilt durch ihr Potential gegenüber Erde:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R - r}.$$

Daraus folgt

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

Elektrisches Ersatzschaltbild.

Die auf der Kugelschale gespeicherte Ladung setzt sich aus zwei Beiträgen zusammen.

Das Feld im Zwischenraum entspricht dem eines Kugelkondensators zwischen der Kugelschale und der geerdeten Kugel. Seine Potentialdifferenz beträgt

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

also ist seine Kapazität

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r}.$$

Das äußere Feld entspricht dem eines Kondensators zwischen der Außenfläche der Kugelschale und der weit entfernten Erde. Da

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

gilt, hat dieser Beitrag die Kapazität

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

Beide Kondensatoren haben die Kugelschale als gemeinsamen Anschluss. Ihre anderen Anschlüsse – die Kugel und die Erde – sind durch den Erdungsdraht verbunden, sodass sie parallel geschaltet sind:

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R - r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r}.$$

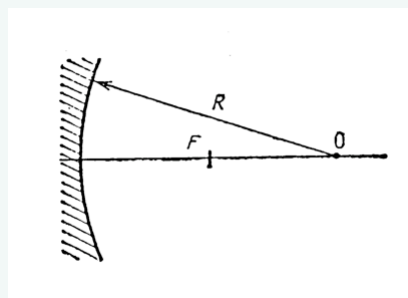
Um das Ersatzschaltbild zu zeichnen, markieren Sie einen Knoten S für die äußere Kugelschale und teilen Sie die Verbindung in zwei Zweige auf. Zeichnen Sie in jeden Zweig einen Kondensator, beschriftet mit $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$ bzw. $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$. Verbinden Sie deren andere Enden an einem gemeinsamen Knoten mit einem Erdungssymbol. Die Potentialdifferenz an jedem Kondensator beträgt 225 V , wobei der Anschluss an der Kugelschale positiv ist.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 4: Sphärischer Teleskopspiegel und ein scheibenförmiger Empfänger in seinem Brennpunkt

In ein Teleskop ist ein sphärischer Spiegel eingebaut. Sein Öffnungsdurchmesser beträgt $D = 0,5 \text{ m}$, sein Krümmungsradius $R = 2 \text{ m}$. Im Hauptbrennpunkt des Spiegels befindet sich ein Strahlungsempfänger in Form einer kreisförmigen Scheibe. Die Scheibe steht senkrecht zur optischen Achse des Spiegels (Abb. 4). Wie groß muss der Radius r des Empfängers sein, damit er den gesamten vom Spiegel reflektierten Strahlungsfluss auffangen kann? Wie würde der empfangene Strahlungsfluss abnehmen, wenn die Abmessungen des Detektors um den Faktor 8 verkleinert würden?

Hinweise: 1) Für kleine Werte von α ($\alpha \ll 1$) darf bei der Berechnung die Näherung $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$ verwendet werden; 2) Beugung ist nicht zu berücksichtigen.



Antworten

- **Erforderlicher Empfängerradius:**

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Ohne die Entwicklung für kleine Öffnungen ergibt sich geometrisch $2.024 \dots \text{ mm}$.

- **Strahlungsfluss nach einer Verkleinerung der linearen Abmessungen um den Faktor acht:**

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

Der empfangene Strahlungsfluss nimmt ungefähr um den Faktor **4** ab, was einem **Verlust von 75%** entspricht. Die Strahlengeometrie ohne Näherungsentwicklung ergibt einen verbleibenden Anteil von $0.25449 \dots$

Lösung

Erforderlicher Empfängerradius

Wir nehmen eine weit entfernte Quelle auf der optischen Achse an, die parallele Strahlen liefert und die Spiegelöffnung gleichmäßig ausleuchtet. Wir verwenden die geometrische Optik und vernachlässigen die Beugung.

Der Scheitel des Spiegels liege bei $z = 0$, sein Krümmungsmittelpunkt bei $z = R$. Sein paraxialer Brennpunkt liegt daher bei

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

Den Öffnungsradius bezeichnen wir mit

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

Betrachten wir einen einfallenden Strahl in der Höhe h über der Achse. An seinem Reflexionspunkt P bilde die Normale mit der Achse den Winkel θ . Aus der Kugeloberfläche folgt

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

Nach dem Reflexionsgesetz verläuft der reflektierte Strahl unter dem Winkel 2θ auf die Achse zu. Seine vorzeichenbehaftete Höhe beim Erreichen der Brennebene $z = f$ beträgt

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

Durch Einsetzen der obigen Ausdrücke ergibt sich

$$y_F = R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta$$

$$= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strahl die Achse bereits vor dem Erreichen der paraxialen Brennebene gekreuzt hat: Dies ist die sphärische Aberration.

Sein Abstand von der Achse in dieser Ebene ist somit

$$\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2} \right)}{1 - 2h^2/R^2}.$$

Für die vorliegende Öffnung wächst der Zähler mit h , während der positive Nenner abnimmt. Daher wächst $\rho(h)$, und die äußersten Strahlen bestimmen den erforderlichen Scheibenradius:

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2} \right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

Mit den gegebenen Werten ergibt sich

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ m.}$$

Um die geforderte Näherung für kleine Größen zu erhalten, beachten wir, dass

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

Mit der angegebenen Entwicklung gilt

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

Behält man daher in $\rho(h)$ nur den führenden, von null verschiedenen Term bei, erhält man

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

Folglich gilt

$$r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ m} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

Strahlungsfluss nach der Verkleinerung der Detektorabmessungen

Eine Verkleinerung der linearen Abmessungen um den Faktor acht ergibt den Detektorradius

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

Da $\rho(h)$ mit h wächst, empfängt diese kleinere Scheibe die Strahlen, die von einem zentralen Bereich der Spiegelöffnung reflektiert werden, dessen Radius b durch folgende Gleichung festgelegt ist:

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

Mit der soeben hergeleiteten kubischen Abhängigkeit ergibt sich

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

also

$$b = \frac{a}{2}.$$

Bei gleichmäßiger einfallender Beleuchtung und einheitlichem Reflexionsgrad ist der reflektierte Strahlungsfluss proportional zur **projizierten Öffnungsfläche**, die zum Empfang am Detektor beiträgt. Daher gilt

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Der empfangene Strahlungsfluss nimmt somit ungefähr um den Faktor vier ab.

Zum Vergleich: Verwendet man den Ausdruck für $\rho(h)$ ohne Näherungsentwicklung, liefert die Gleichung $\rho(b) = \rho(a)/8$ den Wert $b = 0.126117 \dots \text{ m}$, und damit

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449 \dots,$$

in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in führender Ordnung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen. Wo diese Lösung von der offiziellen Lösung abweicht, enthält die offizielle Lösung einen Fehler oder Druckfehler.