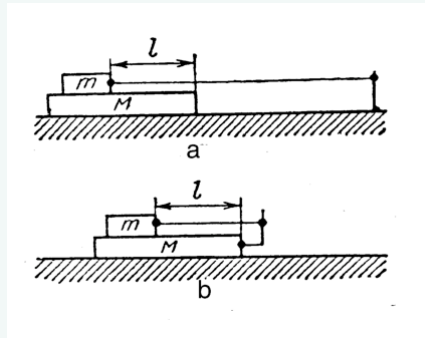


المسألة 1: عربة مزودة بمحرك على قضيب ينزلق على طاولة

وُضع قضيب طويل كتلته $M = 1 \text{ kg}$ على سطح أفقي أملس لطاولة، بحيث يمكنه التحرك دون احتكاك. ويمكن لعربة مزودة بمحرك أن تنزلق على السطح الأفقي العلوي للقضيب، وكتلة العربة $m = 0.1 \text{ kg}$. ومعامل احتكاك العربة هو $\mu = 0.02$. يلف المحرك خيطاً حول محور بسرعة ثابتة $v_0 = 0.1 \text{ m/s}$. ويُربط الطرف الآخر للخيط بدعامة ثابتة بعيدة نسبياً في إحدى الحالتين (الشكل 1، a)، بينما يُربط في الحالة الأخرى بوتر عند حافة القضيب (الشكل 1، b). مع إبقاء القضيب مثبتاً، يُسمح للعربة بأن تبدأ الحركة بسرعة V_0 ، ثم يُحرر القضيب.



الشكل 1

عند لحظة تحرير القضيب، تكون الحافة الأمامية للعربة على مسافة $l = 0.5 \text{ m}$ من الحافة الأمامية للقضيب. أوجد في كلتا الحالتين قوانين حركة كل من القضيب والعربة، والزمن الذي تستغرقه العربة للوصول إلى الحافة الأمامية للقضيب.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

اعتبر $t = 0$ لحظة التحرير، والاتجاه إلى الأمام هو الاتجاه الموجب. وليرمز x_b و x_c إلى إزاحتي القضيب والعربة عن موقعيهما الابتدائيين، على الترتيب. باستخدام $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، نعرّف

$$a = \frac{\mu mg}{M} = 0.0196 \text{ m/s}^2, \quad t_* = \frac{v_0}{a} \approx 5.1 \text{ s}.$$

• (a) الخيط مربوط بالدعامة الثابتة:

$$x_c(t) = v_0 t, \quad x_b(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

بعد t_* ، يتحرك الجسمان بسرعة 0.1 m s^{-1} . لا تصل العربّة إلى الحافة الأمامية أبداً: إذ تكون المسافة المتبقية

$$d_{\min} = l - \frac{M v_0^2}{2 \mu m g} \approx 0.25 \text{ m}.$$

• (b) الخيط مربوط بالقضيب:

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

يبقى القضيب ساكناً، وتصل العربّة إلى حافته الأمامية بعد

$$t_{\text{edge}} = \frac{l}{v_0} = 5.0 \text{ s}.$$

الحل

اعتبر الخيط عديم الكتلة وغير قابل للاستطالة، وفسر v_0 على أنها السرعة الخطية الثابتة للفّ الخيط. الخيط أفقي، لذا فإن القوة العمودية المؤثرة في العربّة تساوي mg . أثناء الانزلاق، يكون مقدار قوة الاحتكاك

$$f = \mu mg.$$

ولا تؤثر الطاولة في القضيب بأي قوة أفقية.

قبل التحرير، يكون القضيب ونقطة ربط الخيط ساكنين في كلا الترتيبين. ومن ثم، فإن السرعة الابتدائية للعربة هي

$$V_0 = v_0.$$

لا ينتج عن إزالة القيد أي دفع، لذا يكون مباشرةً بعد التحرير

$$v_b(0) = 0, \quad v_c(0) = v_0.$$

(a) الخيط مربوط بالدعامة الثابتة

بما أن الطرف البعيد للخيط ثابت، فإن لفّه بسرعة v_0 يجعل العربّة تقترب من ذلك الطرف بالسرعة نفسها:

$$v_c = v_0, \quad x_c = v_0 t.$$

في البداية، تنزلق العربّة إلى الأمام بالنسبة إلى القضيب. ويؤثر الاحتكاك في العربّة إلى الخلف، وفي القضيب إلى الأمام. إذا كان T هو شد الخيط، فإن قانون نيوتن الثاني يعطي

$$m \dot{v}_c = T - f = 0, \quad M \dot{v}_b = f.$$

إذن $T = f$ ، ويتحرك القضيب بتسارع ثابت

$$a = \frac{f}{M} = \frac{\mu m g}{M}.$$

وما دامت العربّة تنزلق إلى الأمام، فإن

$$v_b = at, \quad x_b = \frac{1}{2} a t^2.$$

السرعة النسبية هي

$$v_c - v_b = v_0 - at.$$

وتتعدم عند

$$t_* = \frac{v_0}{a} = \frac{Mv_0}{\mu mg} \approx 5.1 \text{ s.}$$

تكون إزاحة العربة إلى الأمام بالنسبة إلى القضيب حتى هذه اللحظة

$$s_{\max} = x_c(t_*) - x_b(t_*) = v_0 t_* - \frac{1}{2} a t_*^2 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{Mv_0^2}{2\mu mg}.$$

عددياً،

$$s_{\max} = \frac{1(0.1)^2}{2(0.02)(0.1)(9.8)} \approx 0.255 \text{ m.}$$

بما أن $s_{\max} < l = 0.5 \text{ m}$ ، فإن العربة لم تصل إلى الحافة عندما تتوقف الحركة النسبية.

عند t_* ، تكون سرعة كلا الجسمين v_0 . ويمكنهما بعد ذلك مواصلة الحركة معاً دون قوى أفقية: إذ يكون كلٌّ من الاحتكاك والشد صفرًا. ولذلك يجب أن ينعدم التسارع الناشئ عن الاحتكاك الانزلاقي عند هذه اللحظة. عندما $t \geq t_*$ ،

$$v_b = v_c = v_0,$$

و

$$x_b(t) = x_b(t_*) + v_0(t - t_*) = v_0 t - \frac{v_0^2}{2a}.$$

المسافة الفاصلة بين الحافتين الأماميتين هي

$$d(t) = l + x_b(t) - x_c(t) = \begin{cases} l - v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, & 0 \leq t \leq t_*, \\ l - \frac{v_0^2}{2a}, & t \geq t_*. \end{cases}$$

وقيمتها النهائية تساوي تقريباً 0.245 m ، لذا لا يوجد زمن وصول منتهٍ.

(b) الخيط مربوط بالقضيب

هنا يقلل المحرك المسافة بين العربة ونقطة مثبتة على القضيب. ولذلك،

$$v_c - v_b = v_0.$$

جميع القوى الأفقية قوى داخلية في منظومة القضيب والعربة: يسحب الخيط العربة إلى الأمام والقضيب إلى الخلف، بينما يؤثر الاحتكاك بقوتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الاتجاه، في الاتجاهين المقابلين. ومن ثم يكون الزخم الأفقي الكلي محفوظاً:

$$Mv_b + mv_c = mv_0,$$

حيث يمثل الطرف الأيمن الزخم عند التحرير.

بالتعويض بـ $v_c = v_b + v_0$ ،

$$Mv_b + m(v_b + v_0) = mv_0,$$

ومن ثم

$$v_b = 0, \quad v_c = v_0.$$

إذن

$$x_b(t) = 0, \quad x_c(t) = v_0 t.$$

يساوي الشد قوة الاحتكاك الانزلاقي، $T = \mu mg$ ، فتكون القوة المحصلة على كل جسم صفرًا.

تتناقص المسافة الفاصلة بين الحافتين الأماميتين بانتظام:

$$d(t) = l - v_0 t.$$

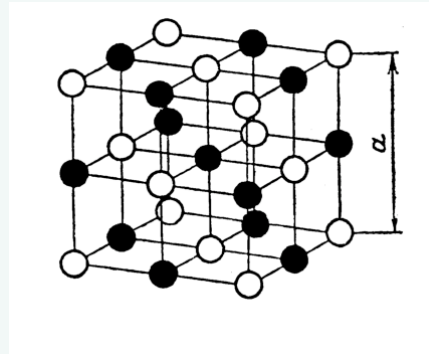
بوضع $d = 0$ ، نحصل على

$$t_{\text{edge}} = \frac{0.5 \text{ m}}{0.1 \text{ m s}^{-1}} = 5.0 \text{ s.}$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: كتلة ذرة الهيدروجين من خلية الوحدة لبلورة NaCl

خلية الوحدة لبلورة كلوريد الصوديوم (ملح الطعام - NaCl) مكعب طول حرفه $a = 5.6 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ (الشكل 2). تمثل الدوائر السوداء في الشكل مواضع ذرات الصوديوم، بينما تمثل الدوائر البيضاء ذرات الكلور. وتتكون بلورة ملح الطعام بأكملها من تكرار خلايا الوحدة هذه. الكتلة الذرية النسبية للصوديوم هي 23 وللكلور 35,5. كثافة ملح الطعام $\rho = 2.22 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. أوجد كتلة ذرة الهيدروجين.



الشكل 2

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 2. $m_{\text{H}} \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ، أو $1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ عند التقريب إلى رقمين معنويين.

الحل

المسألة 2.

الكتلة المنسوبة إلى خلية وحدة واحدة تساوي حجمها مضروباً في كثافة البلورة:

$$M_{\text{الخلية}} = \rho a^3.$$

لعدّ الذرات التي تنتمي إلى خلية واحدة، نأخذ في الحسبان اشتراك الخلايا المتجاورة فيها. فالذرة الواقعة عند رأس تنتمي إلى ثماني خلايا، والذرة الواقعة عند منتصف حرف تنتمي إلى أربع خلايا، والذرة الواقعة عند مركز وجه تنتمي إلى خليتين. أما الذرة الموجودة داخل المكعب فتتنتمي بالكامل إلى تلك الخلية.

تمثل الدوائر البيضاء ذرات الكلور عند الرؤوس الثمانية ومراكز الأوجه الستة. وعددها الفعلي في كل خلية هو

$$N_{\text{Cl}} = 8 \left(\frac{1}{8} \right) + 6 \left(\frac{1}{2} \right) = 4.$$

تمثل الدوائر السوداء ذرات الصوديوم عند منتصفات الأحرف الاثني عشر ومركز المكعب:

$$N_{\text{Na}} = 12 \left(\frac{1}{4} \right) + 1 = 4.$$

وهكذا تحتوي كل خلية وحدة على أربع وحدات صيغة من NaCl.

ضمن مستوى الدقة المقصود هنا، نأخذ الكتلة الذرية النسبية للهيدروجين مساوية لـ 1 ونهمل تغيرات الكتلة الناتجة عن الترابط الكيميائي. وعندئذ نقتضي الكتل الذرية النسبية المعطاة أن

$$m_{\text{Na}} \simeq 23m_{\text{H}}, \quad m_{\text{Cl}} \simeq 35.5m_{\text{H}}.$$

وبالتالي،

$$\rho a^3 = 4m_{\text{Na}} + 4m_{\text{Cl}} \simeq 4(23 + 35.5)m_{\text{H}} = 234m_{\text{H}}.$$

بحل المعادلة لإيجاد كتلة ذرة الهيدروجين نحصل على

$$m_{\text{H}} \simeq \frac{\rho a^3}{234} = \frac{(2.22 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(5.6 \times 10^{-10} \text{ m})^3}{234} = 1.666 \dots \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

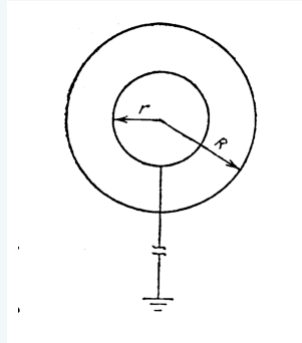
بما أن طول الحرف معطى برقمين معنويين، فإن

$$m_{\text{H}} \simeq 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}.$$

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: كرة معدنية مؤرّضة داخل قشرة كروية مشحونة

داخل كرة معدنية رقيقة الجدار نصف قطرها $R = 20 \text{ cm}$ توجد كرة معدنية نصف قطرها $r = 10 \text{ cm}$ تتحد معها في المركز. تتصل الكرة الداخلية بالأرض بسلك طويل جداً يمر عبر فتحة في الكرة الخارجية (الشكل 3). توضع شحنة $Q = 10^{-8} \text{ C}$ على الكرة الخارجية. احسب جهد هذه الكرة والسعة الكهربائية لمنظومة الأجسام الموصلة الناتجة، وارسم مخططاً كهربائياً مكافئاً لها.



الشكل 3

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

ليس للمسألة 3 أجزاء فرعية مرقّمة. وفق الترتيب المطلوب:

• جهد الكرة الخارجية بالنسبة إلى الأرض:

$$V = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2} \approx 225 \text{ V}.$$

• السعة الكهربائية للمنظومة:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r} \approx 4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}.$$

• المخطط الكهربائي المكافئ: مكثفان موصولان على التوازي بين الكرة الخارجية والأرض:

$$C_{\text{gap}} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r} \approx 22.3 \text{ pF}, \quad C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 R \approx 22.3 \text{ pF}.$$

الحل

نهمل الاضطراب الناجم عن الفتحة الصغيرة وسلك التوصيل، ونعامل الأرض بوصفها موصلًا بعيدًا جهده صفر. سُمك القشرة مهمل، لذا فإن نصف قطر كل من سطحها هو R .

القشرة الخارجية معزولة كهربائيًا وتحتفظ بشحنتها الكلية Q . أما الكرة الداخلية فيمكنها تبادل الشحنة مع الأرض.

جهد الكرة الخارجية.

لتكن الشحنة النهائية على الكرة الداخلية q . في حالة الاتزان الكهروستاتيكي، ينعقد المجال الكهربائي داخل معدن القشرة. لذلك يحيط سطح غاوسي داخل ذلك المعدن بشحنة صافية تساوي صفرًا. وبناءً عليه، يحمل السطح الداخلي للقشرة شحنة $-q$ ، ويحمل سطحها الخارجي شحنة

$$Q_{\text{outer}} = Q + q.$$

لنكتب $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$. يُولد سطح كروي مشحون بانتظام جهدًا ثابتًا kQ/R في كل نقطة داخله. ومن ثم يكون جهد الكرة الداخلية

$$V_{\text{ball}} = k \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} \right).$$

ولأن الكرة مؤرّضة، فإن

$$V_{\text{ball}} = 0 \implies q = -Q \frac{r}{R}.$$

عدديًا،

$$q = -5.0 \times 10^{-9} \text{ C}.$$

إذن يحمل كل من السطحين الداخلي والخارجي للقشرة شحنة $+5.0 \times 10^{-9} \text{ C}$.

عند القشرة، يكون الجهد

$$V = k \frac{Q + q}{R} = k \frac{Q}{R} \left(1 - \frac{r}{R} \right) = \frac{Q(R - r)}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

باستخدام $k \simeq 8.99 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$

$$V = (8.99 \times 10^9)(10^{-8}) \frac{0.20 - 0.10}{(0.20)^2} \approx \boxed{225 \text{ V}}.$$

السعة الكهربائية للمنظومة.

السعة الكهربائية هي الشحنة الموضوعة على القشرة المعزولة مقسومة على جهدها بالنسبة إلى الأرض:

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{R - r}.$$

ومن ثم

$$C = \frac{1}{8.99 \times 10^9} \frac{(0.20)^2}{0.20 - 0.10} \approx \boxed{4.45 \times 10^{-11} \text{ F} = 44.5 \text{ pF}}.$$

المخطط الكهربائي المكافئ.

للشحنة المخزنة على القشرة مساهمتان.

يقابل المجال في الفجوة مكثفًا كرويًا بين القشرة والكرة المؤرّضة. فرق الجهد بين طرفيه هو

$$V = k(-q) \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right),$$

لذا فإن سعته الكهربائية هي

$$C_{\text{gap}} = \frac{-q}{V} = \frac{4\pi\epsilon_0 r R}{R - r}.$$

يقابل المجال الخارجي مكثفًا بين السطح الخارجي للقشرة والأرض البعيدة. وبما أن

$$V = k \frac{Q_{\text{outer}}}{R},$$

فإن السعة الكهربائية المقابلة لهذه المساهمة هي

$$C_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{outer}}}{V} = 4\pi\epsilon_0 R.$$

يشترك المكثفان في القشرة بوصفها أحد طرفيهما. أما طرفاهما الآخران، أي الكرة والأرض، فيتصلان بسلك التأريض، لذا فهما موصولان على التوازي:

$$C = C_{\text{gap}} + C_{\text{ext}} = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{rR}{R - r} + R \right) = \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{R - r}.$$

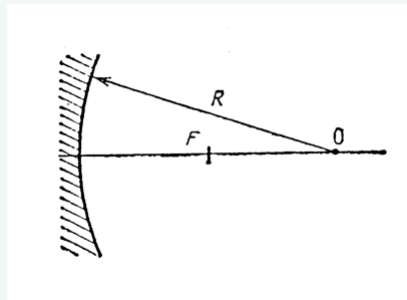
لرسم المخطط، ضع عقدة S تمثل القشرة الخارجية، ثم قسّم التوصيل إلى فرعين. ضع مكثفًا في كل فرع، واكتب بجانبهما $C_{\text{ext}} = 22.3 \text{ pF}$ و $C_{\text{gap}} = 22.3 \text{ pF}$. صل طرفيهما الآخرين بعقدة مشتركة تحمل رمز الأرض. فرق الجهد بين طرفي كل مكثف هو 225 V ، ويكون الطرف المتصل بالقشرة موجبًا.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 4: مرآة تلسكوب كروية ومستقبل قرصي في بؤرتها

رُكِّبت مرآة كروية في تلسكوب. قطرها العرضي هو $D = 0,5 \text{ m}$ ، ونصف قطر تكورها $R = 2 \text{ m}$. يوجد في البؤرة الرئيسية للمرآة مستقبل للإشعاع على شكل قرص دائري. وُضع القرص عموديًا على المحور البصري للمرآة (الشكل 4). كم ينبغي أن يكون نصف قطر المستقبل r لكي يستقبل كامل تدفق الإشعاع المنعكس عن المرآة؟ وكيف ينخفض تدفق الإشعاع المستقبل إذا صُغرت أبعاد الكاشف إلى ثُمن قيمتها؟

إرشادات: (1) عند إجراء الحسابات لقيم صغيرة من α ($\alpha \ll 1$)، يمكن استخدام التعويض $\sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}$ ؛ (2) ينبغي عدم أخذ الحيود في الحسبان.



الشكل 4

الإجابات

- نصف قطر المستقبل المطلوب:

$$r_{\min} \simeq \frac{D^3}{16R^2} \approx 2.0 \text{ mm.}$$

من دون استخدام التوسع الخاص بالفتحة الصغيرة، تكون النتيجة الهندسية $2.024 \dots \text{ mm}$.

- التدفق بعد تصغير الأبعاد الخطية إلى ثُمّن قيمتها:

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} \simeq \frac{1}{4}.$$

ينخفض التدفق المستقبل بعامل مقداره 4 تقريباً، وهو ما يقابل فقداناً بنسبة 75%. وتعطي هندسة الأشعة من دون توسع نسبة متبقية مقدارها $0.25449 \dots$.

الحل

نصف قطر المستقبل المطلوب

نفترض وجود مصدر بعيد على المحور البصري، يوفّر أشعة متوازية وإضاءة منتظمة على امتداد فتحة المرآة. نستخدم البصريّات الهندسية ونهمل الحيود.

ليكن رأس المرآة عند $z = 0$ ، ومركز تكورها عند $z = R$. ومن ثم تقع بؤرتها في تقريب الأشعة القريبة من المحور عند

$$f = \frac{R}{2} = 1 \text{ m.}$$

نكتب نصف قطر الفتحة على الصورة

$$a = \frac{D}{2} = 0.25 \text{ m.}$$

لننظر في شعاع ساقط على ارتفاع h فوق المحور. ولتكن الزاوية التي يصنعها العمود على السطح مع المحور عند نقطة انعكاسه P هي θ . من هندسة السطح الكروي نحصل على

$$h = R \sin \theta, \quad z_P = R(1 - \cos \theta).$$

وفقاً لقانون الانعكاس، يتجه الشعاع المنعكس نحو المحور بزاوية 2θ . ويكون ارتفاعه الجبري عند وصوله إلى المستوى البؤري $z = f$ هو

$$y_F = h - (f - z_P) \tan 2\theta.$$

بالتعويض بالتعبيرات السابقة،

$$\begin{aligned} y_F &= R \sin \theta - R \left(\cos \theta - \frac{1}{2} \right) \tan 2\theta \\ &= - \frac{R \sin \theta (1 - \cos \theta)}{\cos 2\theta}. \end{aligned}$$

تعني الإشارة السالبة أن الشعاع قد عبر المحور بالفعل قبل وصوله إلى المستوى البؤري للأشعة القريبة من المحور: وهذا هو الزيغ الكروي.

إذن تكون المسافة بينه وبين المحور في ذلك المستوى

$$\rho(h) = \frac{h \left(1 - \sqrt{1 - h^2/R^2}\right)}{1 - 2h^2/R^2}.$$

بالنسبة إلى الفتحة المعطاة، يزداد البسط مع ازدياد h ، بينما يتناقص المقام الموجب. ومن ثم تزداد $\rho(h)$ ، وتحدد الأشعة الأبعد عن المحور نصف قطر القرص المطلوب:

$$r_{\min} = \rho(a) = \frac{a \left(1 - \sqrt{1 - a^2/R^2}\right)}{1 - 2a^2/R^2}.$$

بالتعويض بالقيم المعطاة، نحصل على

$$r_{\min} = 2.024 \dots \times 10^{-3} \text{ m}.$$

للحصول على التقريب المطلوب للكميات الصغيرة، نلاحظ أن

$$\frac{h^2}{R^2} \leq \frac{a^2}{R^2} = \frac{1}{64} \ll 1.$$

باستخدام التوسع المعطى،

$$1 - \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \simeq \frac{h^2}{2R^2}.$$

وعليه، فإن الاحتفاظ بالحد غير الصفري من أدنى رتبة في $\rho(h)$ يعطي

$$\rho(h) \simeq \frac{h^3}{2R^2}.$$

وبالتالي،

$$r_{\min} \simeq \frac{a^3}{2R^2} = \frac{D^3}{16R^2} = \frac{(0.5)^3}{16(2)^2} \text{ m} = 1.95 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 2.0 \text{ mm}.$$

التدفق بعد تصغير أبعاد الكاشف

عند تصغير الأبعاد الخطية إلى ثُمن قيمتها، يصبح نصف قطر الكاشف

$$r_{\text{small}} = \frac{r_{\min}}{8}.$$

بما أن $\rho(h)$ تزداد مع ازدياد h ، فإن هذا القرص الأصغر يستقبل الأشعة المنعكسة عن جزء مركزي من فتحة المرآة، نصف قطره b ، تحده العلاقة

$$\rho(b) = \frac{\rho(a)}{8}.$$

باستخدام الاعتماد التكعيبي الذي اشتققناه للتو،

$$\frac{b^3}{2R^2} = \frac{1}{8} \frac{a^3}{2R^2},$$

ومن ثم

$$b = \frac{a}{2}.$$

عندما تكون الإضاءة الساقطة والانعكاسية منتظمتين، يتناسب التدفق المنعكس مع مساحة إسقاط الفتحة التي تسهم في الإشعاع الواصل إلى الكاشف. لذلك،

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = \frac{\pi b^2}{\pi a^2} \simeq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

وهكذا ينخفض التدفق المستقبَل إلى نحو رُبْع قيمته.

للمقارنة، باستخدام التعبير غير الموسَّع لـ $\rho(h)$ ، تعطي المعادلة $\rho(b) = \rho(a)/8$ القيمة $b = 0.126117 \dots$ m، ومن ثم

$$\frac{\Phi_{\text{small}}}{\Phi_{\text{full}}} = 0.25449 \dots,$$

وهو ما يتفق مع النتيجة المحسوبة بالاختصار على الحد من أدنى رتبة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي. حيثما يختلف هذا الحل عن الحل الرسمي، يحتوي الحل الرسمي على خطأ أو خطأ مطبعي.