

IPhO 1969

理论题与解答 · 捷克斯洛伐克布尔诺 · 4 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1969/

题目 1：由绕过滑轮的绳子连接的三辆小车

图 1 所示的力学系统由三辆小车 A 、 B 和 C 组成，其质量分别为 $m_1 = 0.3 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ 和 $m_3 = 1.5 \text{ kg}$ 。小车 B 和 A 由一根绷紧且不可伸长的轻绳连接，绳子绕过一个安装在小车 C 上的光滑轻滑轮，如图所示。在本题中，所有阻力和摩擦力均可忽略，滑轮以及三辆小车所有车轮的转动惯量也均可忽略。取重力加速度 g 为 9.81 m s^{-2} 。

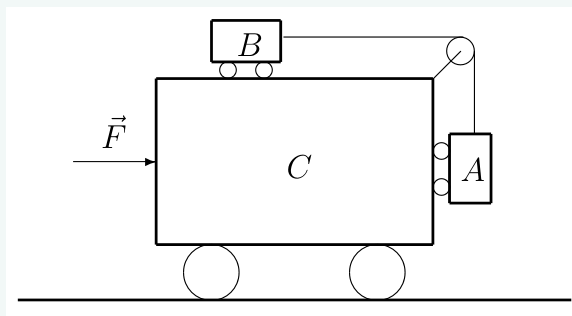


图 1:

1. 现对小车 C 施加一个如图所示的水平力 $\vec{F}$ 。 $\vec{F}$ 的大小使小车 A 和 B 相对于小车 C 保持静止。

a) 求连接小车 A 和 B 的绳子的张力。

b) 求 $\vec{F}$ 的大小。

2. 随后将小车 C 固定不动，并将小车 A 和 B 从静止状态释放。

a) 求小车 A 和 B 的加速度。

b) 再计算绳子的张力。

题目译自官方英文原文。

答案

- 1(a): $T = 2.94 \text{ N}$ 。
- 1(b): $F = 29.4 \text{ N}$ 。
- 2(a): 小车 A 以 5.89 m s^{-2} 的加速度向下运动；小车 B 以 5.89 m s^{-2} 的加速度向右，即朝向滑轮运动。
- 2(b): $T = 1.18 \text{ N}$ 。

解答

由于绳子为轻绳且滑轮为理想滑轮，整根绳子的张力 T 处处相同。忽略摩擦时，各接触力均垂直于相应的支承面。我们在地面参考系中应用牛顿第二定律。

1(a)

由于 A 相对于 C 保持静止，且 C 沿水平方向运动， A 在竖直方向上没有加速度。它在竖直方向上受到的力为向下的重力 m_1g 和向上的张力 T 。因此

$$T - m_1g = 0,$$

得到

$$T = m_1g = 0.3(9.81) = 2.943 \text{ N} \simeq 2.94 \text{ N}.$$

C 对 A 的水平法向力使 A 产生水平加速度。

1(b)

设三辆小车共同的水平加速度为 a_C 。 B 所受的唯一水平力是绳子的张力，因此

$$T = m_2a_C.$$

于是，

$$a_C = \frac{m_1g}{m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.2} = 14.715 \text{ m s}^{-2}.$$

对于由小车、绳子和滑轮组成的整个系统，接触力和绳子的作用力都是内力。唯一的水平外力是 F 。因此，

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_C = \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2}g.$$

代入数值得，

$$F = (0.3 + 0.2 + 1.5)(14.715) = 29.43 \text{ N} \simeq 29.4 \text{ N}.$$

2(a)

当 C 被固定不动时，滑轮的位置也固定。若 A 向下移动距离 s ，则竖直绳段的长度增加 s 。由于绳子绷紧且不可伸长，水平绳段必须缩短相同的长度： B 朝滑轮移动距离 s 。因此，两者的加速度大小相等。

设这一大小为 a ，对 A 取向下为正方向，对 B 取向右为正方向。由牛顿第二定律，对 A 有

$$m_1g - T = m_1a$$

而对 B 有

$$T = m_2a$$

将两式相加，消去张力：

$$m_1g = (m_1 + m_2)a.$$

因此

$$a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.3 + 0.2} = 5.886 \text{ m s}^{-2} \simeq 5.89 \text{ m s}^{-2}.$$

因此， A 向下加速运动， B 沿水平方向向右、朝滑轮加速运动。

2(b)

利用 B 在水平方向上的运动方程,

$$T = m_2 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

因此,

$$T = 0.2(5.886) = 1.1772 \text{ N} \simeq 1.18 \text{ N}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 2：将冰块投入铜量热器中的水中

质量为 m_1 的铜量热器中盛有质量为 m_2 的水。二者的共同温度为 t_2 。将一块质量为 m_3 、温度为 $t_3 < 0^\circ\text{C}$ 的冰投入量热器中。

a) 对于一般的 m_1, m_2, m_3, t_2 和 t_3 值, 求平衡状态下的温度以及水和冰的质量。对所有需要考虑的可能过程写出平衡方程。

b) 当 $m_1 = 1.00 \text{ kg}$ 、 $m_2 = 1.00 \text{ kg}$ 、 $m_3 = 2.00 \text{ kg}$ 、 $t_2 = 10^\circ\text{C}$ 、 $t_3 = -20^\circ\text{C}$ 时, 求最终温度以及水和冰的最终质量。

忽略能量损失, 假设气压为标准大气压。铜的比热容为 $c_1 = 0.1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, 水的比热容为 $c_2 = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, 冰的比热容为 $c_3 = 0.492 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, 冰的熔化潜热为 $l = 78.7 \text{ kcal/kg}$ 。取 $1 \text{ cal} = 4.2 \text{ J}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- a) 定义水和冰的总质量, 以及在 0°C 时的热量盈余:

$$M = m_2 + m_3, \quad D = (m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 + m_3 c_3 t_3.$$

平衡温度 t_f 和各相质量为:

条件	t_f	最终液态水的质量	最终冰的质量
$D < -m_3 l$	$\frac{D + m_3 l}{m_1 c_1 + M c_3} < 0$	0	M
$-m_3 l \leq D \leq m_3 l$	0°C	$m_2 + \frac{D}{l}$	$m_3 - \frac{D}{l}$
$D > m_3 l$	$\frac{D - m_3 l}{m_1 c_1 + M c_2} > 0$	M	0

在中间情形中, $D < 0$ 时发生凝固, $D > 0$ 时发生熔化, $D = 0$ 时各相的质量保持不变。两个端点分别对应于在 0°C 时全部为冰或全部为水的状态。

• b)

$$t_f = 0^\circ\text{C}, \quad m_{\text{water}} = 0.890 \text{ kg}, \quad m_{\text{ice}} = 2.11 \text{ kg}.$$

原有的水中约有 0.110 kg 凝固。

解答

a)

在没有热量损失的情况下，降温和凝固放出的热量等于升温 and 熔化吸收的热量。将题目给出的比热容和熔化潜热视为常量。在标准大气压下，液态水和冰在 0°C 时平衡共存。

令

$$A = (m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2$$

表示量热器和原有的水冷却至 0°C 时放出的热量，并令

$$B = m_3 c_3 (0 - t_3)$$

表示使原有的冰升温至 0°C 所需的热量。两者之差为

$$D = A - B = (m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 + m_3 c_3 t_3.$$

将这一差值与相变所能吸收或放出的潜热进行比较，即可确定可能发生的过程。

部分熔化，最终温度为 0°C 。

若 $0 \leq D \leq m_3 l$ ，显热盈余使质量为 x 的冰熔化。热平衡方程为

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 = m_3 c_3 (0 - t_3) + x l,$$

即 $A = B + x l$ 。因此

$$x = \frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$
$$m_{\text{water}} = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 - \frac{D}{l}.$$

当 $D = 0$ 时，不发生净相变。当 $D = m_3 l$ 时，最后剩余的冰恰好熔化，最终状态为全部是 0°C 的水。

完全熔化，最终温度高于 0°C 。

若 $D > m_3 l$ ，所有的冰均熔化。量热器和原有的水从 t_2 冷却至 t_f ，而投入的冰先升温至零摄氏度，然后熔化，再以液态水的形式升温至 t_f ：

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) (t_2 - t_f) = m_3 c_3 (0 - t_3) + m_3 l + m_3 c_2 t_f.$$

合并含有 t_f 的项，得到

$$D - m_3 l = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2] t_f.$$

因此

$$t_f = \frac{D - m_3 l}{m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2}, \quad m_{\text{water}} = m_2 + m_3, \quad m_{\text{ice}} = 0.$$

部分凝固，最终温度为 0°C 。

若 $-m_2 l \leq D < 0$ ，量热器和水冷却至零摄氏度时放出的热量不足以使原有的冰升温至零摄氏度。原有的水中必须有质量为 y 的部分凝固，释放潜热：

$$(m_1c_1 + m_2c_2)t_2 + yl = m_3c_3(0 - t_3).$$

于是

$$y = -\frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$

$$m_{\text{water}} = m_2 - y = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 + y = m_3 - \frac{D}{l}.$$

当 $D = -m_2l$ 时, 原有的水全部凝固, 最终只剩下 0°C 的冰。

完全凝固, 最终温度低于 0°C 。

若 $D < -m_2l$, 即使原有的水全部凝固, 也不足以使系统达到零摄氏度。最终状态中只有温度为 $t_f < 0$ 的冰。

量热器从 t_2 冷却至 t_f 。原有的水先冷却至零摄氏度, 然后凝固, 再以冰的形式冷却至 t_f 。它们放出的热量使原有的冰从 t_3 升温至 t_f :

$$m_1c_1(t_2 - t_f) + m_2c_2t_2 + m_2l + m_2c_3(0 - t_f) = m_3c_3(t_f - t_3).$$

整理得

$$D + m_2l = [m_1c_1 + (m_2 + m_3)c_3]t_f,$$

因此

$$t_f = \frac{D + m_2l}{m_1c_1 + (m_2 + m_3)c_3}, \quad m_{\text{water}} = 0, \quad m_{\text{ice}} = m_2 + m_3.$$

这些情形涵盖了所有可能的平衡状态。

b)

量热器和水能够放出

$$A = (1.00 \times 0.1 + 1.00 \times 1) \times 10 = 11.0 \text{ kcal}$$

的热量, 只需将它们冷却至 0°C 。

使原有的冰升温至零摄氏度所需的热量为

$$B = 2.00 \times 0.492 \times 20 = 19.68 \text{ kcal}.$$

因此,

$$D = A - B = -8.68 \text{ kcal}.$$

由于

$$-m_2l = -78.7 \text{ kcal} < D < 0,$$

原有的水只有一部分凝固, 平衡温度为 0°C 。

凝固的水的质量为

$$y = \frac{B - A}{l} = \frac{8.68 \text{ kcal}}{78.7 \text{ kcal/kg}} = 0.110292\dots \text{ kg}.$$

因此

$$m_{\text{water}} = 1.00 - y = 0.890 \text{ kg},$$

$$m_{\text{ice}} = 2.00 + y = 2.11 \text{ kg},$$

$$t_f = 0^\circ\text{C}.$$

解答已与官方解答核对。

题目 3：悬挂在带电圆环轴线上的带电小球

一个质量为 m 、电荷量为 q 的带电小球，用一根质量可忽略的绝缘细绳悬挂在半径为 R 的圆环的最高点。圆环由横截面可忽略的刚性金属丝制成，位于竖直平面内。圆环上均匀分布着电荷量为 Q 的电荷，其符号与 q 相同。求细绳的长度 l ，使小球的平衡位置位于垂直于圆环平面的对称轴上。

先求一般解，再求取下列特定数值时的结果： $Q = q = 9.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ 、 $R = 5 \text{ cm}$ 、 $m = 1.0 \text{ g}$ 、 $\epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ 。

题目译自官方英文原文。

答案

- 3. 对于轴线上不在圆环中心处的平衡位置，

$$l = \left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3},$$

条件是

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

两个可能位置的轴向坐标为 $x = \pm\sqrt{l^2 - R^2}$ 。对于给定数据，

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

此外，还存在 $l = R$ 这一特殊的中心平衡位置，它总能满足静力平衡条件。对于这些数据，该位置对应 $l = 5 \text{ cm}$ ，且是不稳定的。

解答

3. 将小球视为点电荷，认为重力场均匀，并采用题目规定的圆环上的均匀电荷分布。无质量细绳沿绳的方向施加张力。

设 O 为圆环中心， A 为其最高点， P 为小球在垂直于圆环平面的轴线上的位置。先考虑 $OP = x > 0$ 的情况。由于 $OA = R$ 垂直于 OP ，

$$l^2 = R^2 + x^2.$$

由对称性，电场平行于圆环平面的分量相互抵消。每个电荷元 dQ 到小球的距离均为 $\sqrt{R^2 + x^2} = l$ 。因此，由库仑定律可得沿轴线方向的合电场力：

$$F_e = \int \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{x}{l} = \frac{Qq x}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

由于 $Qq > 0$ ，该力指向远离圆环的方向。

张力 T 从 P 指向 A 。其竖直向上的分量为 TR/l ，指向圆环平面的分量为 Tx/l 。竖直方向和水平方向的平衡条件为

$$\frac{TR}{l} = mg, \quad \frac{Tx}{l} = \frac{Qqx}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

由第一个方程得 $T/l = mg/R$ 。代入第二个方程，并约去 $x \neq 0$ ，得

$$\frac{mg}{R} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^3},$$

因此

$$l = \left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}.$$

轴向位移非零要求 $l > R$ ，因此该解仅在下列条件下存在：

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

当此条件成立时，由镜面对称性可知存在两个平衡位置，分别位于圆环的两侧：

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{2/3} - R^2}.$$

进行数值计算时，取 $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ 、 $R = 0.050 \text{ m}$ 和 $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 。于是

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 mgR^2} \approx 2.96 > 1,$$

因此，所要求的非中心平衡位置存在。其对应的绳长为

$$l = \left[\frac{(9.0 \times 10^{-8})^2(0.050)}{4\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^{-3})(9.8)} \right]^{1/3} = 0.07176 \text{ m}.$$

因此

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

此时小球到圆环中心的距离约为 5.1 cm 。

最后，约去 x 排除了一种需要单独讨论的情况。在 $x = 0$ 处，由对称性可知电场为零，且对于任意电荷量大小， $l = R$ 、 $T = mg$ 都给出一个中心平衡位置。为检验给定数据下这一平衡位置的稳定性，让小球沿垂直于圆环平面的方向发生微小位移。在一阶近似下，电场力为 $Qqx/(4\pi\epsilon_0 R^3)$ ，而起恢复作用的水平张力分量为 mgx/R 。因此，

$$F_x \simeq \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{mg}{R} \right) x.$$

对于给定数据，该系数为正，因此这一位移会增大：中心平衡是不稳定的。

解答已与官方解答核对。

题目 4：玻璃板与玻璃立方体之间空气层中的干涉

将一块玻璃板置于一个棱长为 2 cm 的玻璃立方体上方，使两者之间留有一层薄空气层，如图 5 所示。

波长介于 400 nm 和 1150 nm 之间的电磁辐射（玻璃板可透过此波段的辐射）从上方垂直入射到玻璃板上，在空气层的上下两个界面发生反射并产生干涉。在此波段内，只有两个波长的辐射出现干涉极大，其中一个为 $\lambda = 400 \text{ nm}$ 。求另一个波长。确定需要使立方体升温多少才能使其接触玻璃板。线膨胀系数为 $\alpha = 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ，空气的折射率为 $n = 1$ 。在升温过程中，立方体底面与玻璃板之间的距离保持不变。

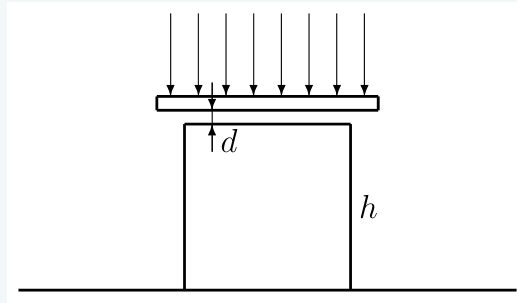


图 5：

题目译自官方英文原文。

答案

- 另一个波长： $\lambda_2 \approx 667 \text{ nm}$ 。
- 所需的温升： 使立方体的温度升高 $\Delta T \approx 3.1 \text{ } ^\circ\text{C}$ 。初始空气间隙的厚度为 $d = 500 \text{ nm}$ 。

解答

另一个波长。 设空气层的厚度为 d 。在其上界面，光从玻璃射向空气时发生反射，不产生相位突变。在其下界面，光从空气射向玻璃时发生反射，产生 π 的相位突变。

垂直入射时，第二束反射光多走的光程为 $2nd$ 。因此，相位差为

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd}{\lambda} + \pi.$$

相长干涉要求相位差为 2π 的整数倍，由此得到

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

代入 $n = 1$ ，反射光出现干涉极大的波长为

$$\lambda_m = \frac{4d}{2m + 1}.$$

设 400 nm 处的干涉极大对应的级次为 m 。则

$$4d = (2m + 1)(400 \text{ nm}).$$

更高级次对应的波长小于 400 nm，因此指定区间内的第二个干涉极大必定对应级次 $m - 1$ 。所以 $m \geq 1$ ，且

$$\lambda_{m-1} = 400 \frac{2m+1}{2m-1} \text{ nm} \leq 1150 \text{ nm}.$$

整理得

$$m \geq \frac{31}{30},$$

因此 $m \geq 2$ 。

该区间内不能存在第三个干涉极大。因此，下一个更长的波长，即级次 $m - 2$ 所对应的波长，必须满足

$$\lambda_{m-2} = 400 \frac{2m+1}{2m-3} \text{ nm} > 1150 \text{ nm}.$$

由此得到

$$m < \frac{77}{30}.$$

同时满足这两个界限的唯一整数为 $m = 2$ 。因此

$$d = \frac{5(400 \text{ nm})}{4} = \boxed{500 \text{ nm}},$$

另一个波长为

$$\lambda_2 = \frac{4d}{3} = \frac{2000}{3} \text{ nm} \approx 667 \text{ nm}.$$

作为检验，下一个波长更长的干涉极大位于 2000 nm，而下一个波长更短的干涉极大位于 $2000/7 \approx 286 \text{ nm}$ ；两者都在给定区间之外。

所需的温升。 立方体的初始高度为

$$h = 2 \text{ cm} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

由于其底面到玻璃板的距离保持不变，当其高度增加 d 时，便会与玻璃板接触。

利用线膨胀关系，并采用给定的恒定膨胀系数，得到

$$\Delta h = \alpha h \Delta T = d,$$

因此

$$\Delta T = \frac{d}{\alpha h} = \frac{5.0 \times 10^{-7}}{(8.0 \times 10^{-6})(2.0 \times 10^{-2})} \text{ }^\circ\text{C} = 3.125 \text{ }^\circ\text{C}.$$

因此，所需的温升为

$$\boxed{\Delta T \approx 3.1 \text{ }^\circ\text{C} \quad (\text{等价于 } 3.1 \text{ K})}.$$

相对伸长量仅为 $d/h = 2.5 \times 10^{-5}$ ，与线性近似相符。

解答已与官方解答核对。