

# IPhO 1969

Теоретические задачи и решения · Брно, Чехословакия · 4 теоретические задачи с полными решениями

[eulersolve.org/ipho/1969/](http://eulersolve.org/ipho/1969/)

## Задача 1: Три тележки, соединённые нитью, перекинутой через блок

На рисунке 1 показана механическая система, состоящая из трёх тележек  $A$ ,  $B$  и  $C$  массами  $m_1 = 0.3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.2 \text{ kg}$  и  $m_3 = 1.5 \text{ kg}$  соответственно. Тележки  $B$  и  $A$  соединены лёгкой натянутой нерастяжимой нитью, перекинутой через лёгкий блок без трения, закреплённый на тележке  $C$ , как показано на рисунке. В этой задаче можно пренебречь всеми силами сопротивления и трения, а также моментами инерции блока и колёс всех трёх тележек. Примите ускорение свободного падения  $g$  равным  $9.81 \text{ m s}^{-2}$ .

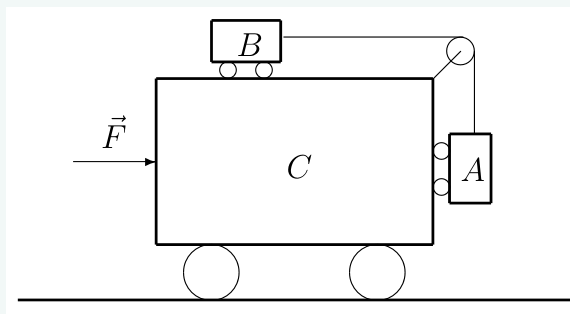


Рисунок 1:

1. Теперь к тележке  $C$  прикладывают горизонтальную силу  $\vec{F}$ , как показано на рисунке. Модуль  $\vec{F}$  таков, что тележки  $A$  и  $B$  остаются неподвижными относительно тележки  $C$ .

- a) Найдите силу натяжения нити, соединяющей тележки  $A$  и  $B$ .
- b) Определите модуль  $\vec{F}$ .

2. Затем тележку  $C$  удерживают неподвижной, а тележки  $A$  и  $B$  отпускают без начальной скорости.

- a) Определите ускорения тележек  $A$  и  $B$ .
- b) Вычислите также силу натяжения нити.

Условие переведено с официального английского текста.

## Ответы

- **1(a):**  $T = 2.94 \text{ N}$ .
- **1(b):**  $F = 29.4 \text{ N}$ .
- **2(a):** Тележка  $A$  движется с ускорением  $5.89 \text{ m s}^{-2}$ , направленным **вниз**; тележка  $B$  движется с ускорением  $5.89 \text{ m s}^{-2}$ , направленным **вправо, к блоку**.
- **2(b):**  $T = 1.18 \text{ N}$ .

## Решение

Лёгкая нить и идеальный блок обеспечивают одинаковую силу натяжения  $T$  по всей длине нити. При отсутствии трения каждая сила контактного взаимодействия направлена перпендикулярно соответствующей опорной поверхности. Применим второй закон Ньютона в системе отсчёта, связанной с землёй.

### 1(a)

Поскольку  $A$  остаётся неподвижной относительно  $C$ , а  $C$  движется горизонтально, вертикальное ускорение  $A$  равно нулю. В вертикальном направлении на неё действуют сила тяжести  $m_1 g$ , направленная вниз, и сила натяжения  $T$ , направленная вверх. Поэтому

$$T - m_1 g = 0,$$

откуда

$$T = m_1 g = 0.3(9.81) = 2.943 \text{ N} \simeq 2.94 \text{ N}.$$

Горизонтальная сила нормальной реакции со стороны  $C$  сообщает тележке  $A$  горизонтальное ускорение.

### 1(b)

Пусть  $a_C$  — общее горизонтальное ускорение всех трёх тележек. Единственная горизонтальная сила, действующая на  $B$ , — сила натяжения нити, поэтому

$$T = m_2 a_C.$$

Следовательно,

$$a_C = \frac{m_1 g}{m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.2} = 14.715 \text{ m s}^{-2}.$$

Для всей системы, состоящей из тележек, нити и блока, силы контактного взаимодействия и силы натяжения нити являются внутренними. Единственная внешняя горизонтальная сила —  $F$ . Поэтому

$$F = (m_1 + m_2 + m_3) a_C = \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2} g.$$

Подставляя численные значения, получаем

$$F = (0.3 + 0.2 + 1.5)(14.715) = 29.43 \text{ N} \simeq 29.4 \text{ N}.$$

## 2(a)

Когда  $C$  удерживают неподвижной, блок также неподвижен. Если  $A$  перемещается вниз на расстояние  $s$ , вертикальный участок нити удлиняется на  $s$ . Поскольку нить натянута и нерастяжима, горизонтальный участок должен укоротиться на ту же величину:  $B$  перемещается к блоку на расстояние  $s$ . Следовательно, модули их ускорений равны.

Обозначим этот модуль через  $a$ , выбрав положительное направление вниз для  $A$  и вправо для  $B$ . Второй закон Ньютона даёт

$$m_1 g - T = m_1 a$$

для  $A$  и

$$T = m_2 a$$

для  $B$ . Складывая уравнения, исключаем силу натяжения:

$$m_1 g = (m_1 + m_2) a.$$

Отсюда

$$a = \frac{m_1 g}{m_1 + m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.3 + 0.2} = 5.886 \text{ m s}^{-2} \simeq 5.89 \text{ m s}^{-2}.$$

Таким образом, ускорение  $A$  направлено вниз, а ускорение  $B$  — горизонтально вправо, к блоку.

## 2(b)

Используя уравнение движения  $B$  в горизонтальном направлении, получаем

$$T = m_2 a = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Следовательно,

$$T = 0.2(5.886) = 1.1772 \text{ N} \simeq 1.18 \text{ N}.$$

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 2: Лёд, опущенный в воду в медном калориметре

В медном калориметре массой  $m_1$  находится вода массой  $m_2$ . Их общая температура равна  $t_2$ . В калориметр опускают кусок льда массой  $m_3$  и температурой  $t_3 < 0^\circ\text{C}$ .

а) Определите температуру и массы воды и льда в состоянии равновесия при произвольных значениях  $m_1, m_2, m_3, t_2$  и  $t_3$ . Запишите уравнения теплового баланса для всех возможных процессов, которые необходимо рассмотреть.

б) Найдите конечную температуру и конечные массы воды и льда при  $m_1 = 1.00 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1.00 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 2.00 \text{ kg}$ ,  $t_2 = 10^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = -20^\circ\text{C}$ .

Пренебрегите потерями энергии; считайте атмосферное давление нормальным. Удельная теплоёмкость меди равна  $c_1 = 0.1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ , удельная теплоёмкость воды —  $c_2 = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ , удельная теплоёмкость льда —  $c_3 = 0.492 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ , удельная теплота плавления льда —  $l = 78,7 \text{ kcal/kg}$ . Примите  $1 \text{ cal} = 4.2 \text{ J}$ .

**Ответы**

- а) Введём суммарную массу воды и льда и избыток теплоты при  $0^\circ\text{C}$ :

$$M = m_2 + m_3, \quad D = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2 + m_3c_3t_3.$$

Равновесная температура  $t_f$  и массы равны:

| Условие                  | $t_f$                                | Конечная масса жидкой воды | Конечная масса льда |
|--------------------------|--------------------------------------|----------------------------|---------------------|
| $D < -m_2l$              | $\frac{D + m_2l}{m_1c_1 + Mc_3} < 0$ | 0                          | $M$                 |
| $-m_2l \leq D \leq m_3l$ | $0^\circ\text{C}$                    | $m_2 + \frac{D}{l}$        | $m_3 - \frac{D}{l}$ |
| $D > m_3l$               | $\frac{D - m_3l}{m_1c_1 + Mc_2} > 0$ | $M$                        | 0                   |

В среднем случае при  $D < 0$  происходит замерзание, при  $D > 0$  — плавление, а при  $D = 0$  массы фаз остаются неизменными. Граничные значения соответствуют состояниям, в которых имеется только лёд или только вода при  $0^\circ\text{C}$ .

- б)

$$t_f = 0^\circ\text{C}, \quad m_{\text{water}} = 0.890 \text{ kg}, \quad m_{\text{ice}} = 2.11 \text{ kg}.$$

Замерзает приблизительно 0.110 kg исходной воды.

**Решение**

а)

При отсутствии теплотерь количество теплоты, выделяющееся при охлаждении и замерзании, равно количеству теплоты, поглощаемому при нагревании и плавлении. Будем считать заданные удельные теплоёмкости и удельную теплоту плавления постоянными. При нормальном атмосферном давлении жидкая вода и лёд сосуществуют в равновесии при  $0^\circ\text{C}$ .

Пусть

$$A = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2$$

— количество теплоты, выделяющееся при охлаждении калориметра и исходной воды до  $0^\circ\text{C}$ , а

$$B = m_3c_3(0 - t_3)$$

— количество теплоты, необходимое для нагревания исходного льда до  $0^\circ\text{C}$ . Их разность равна

$$D = A - B = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2 + m_3c_3t_3.$$

Возможные процессы определяются сравнением этой разности с количеством теплоты, которое может быть поглощено или выделено при фазовых переходах.

### Частичное плавление с конечной температурой $0^\circ\text{C}$ .

Если  $0 \leq D \leq m_3 l$ , избыток теплоты, обусловленный изменением температуры, идёт на плавление льда массой  $x$ . Уравнение теплового баланса имеет вид

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 = m_3 c_3 (0 - t_3) + x l,$$

или  $A = B + x l$ . Следовательно,

$$x = \frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$
$$m_{\text{water}} = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 - \frac{D}{l}.$$

При  $D = 0$  результирующее изменение фазового состава отсутствует. При  $D = m_3 l$  лёд полностью плавится, и в конечном состоянии остаётся только вода при  $0^\circ\text{C}$ .

### Полное плавление с конечной температурой выше $0^\circ\text{C}$ .

Если  $D > m_3 l$ , весь лёд плавится. Калориметр и исходная вода охлаждаются от  $t_2$  до  $t_f$ , а добавленный лёд нагревается до нуля, плавится, после чего образовавшаяся жидкая вода нагревается до  $t_f$ :

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2)(t_2 - t_f) = m_3 c_3 (0 - t_3) + m_3 l + m_3 c_2 t_f.$$

Собирая члены, содержащие  $t_f$ , получаем

$$D - m_3 l = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2] t_f.$$

Следовательно,

$$t_f = \frac{D - m_3 l}{m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2}, \quad m_{\text{water}} = m_2 + m_3, \quad m_{\text{ice}} = 0.$$

### Частичное замерзание с конечной температурой $0^\circ\text{C}$ .

Если  $-m_2 l \leq D < 0$ , теплоты, выделяющейся при охлаждении калориметра и воды до нуля, недостаточно для нагревания исходного льда до нуля. Часть исходной воды массой  $y$  должна замёрзнуть, выделив теплоту кристаллизации:

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 + y l = m_3 c_3 (0 - t_3).$$

Отсюда

$$y = -\frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$
$$m_{\text{water}} = m_2 - y = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 + y = m_3 - \frac{D}{l}.$$

При  $D = -m_2 l$  вся исходная вода замерзает, и остаётся только лёд при  $0^\circ\text{C}$ .

### Полное замерзание с конечной температурой ниже $0^\circ\text{C}$ .

Если  $D < -m_2 l$ , даже замерзание всей исходной воды не позволяет довести температуру системы до нуля. В конечном состоянии имеется только лёд при  $t_f < 0$ .

Калориметр охлаждается от  $t_2$  до  $t_f$ . Исходная вода охлаждается до нуля, замерзает, а затем образовавшийся лёд охлаждается до  $t_f$ . Выделяющаяся при этом теплота нагревает исходный лёд от  $t_3$  до  $t_f$ :

$$m_1 c_1 (t_2 - t_f) + m_2 c_2 t_2 + m_2 l + m_2 c_3 (0 - t_f) = m_3 c_3 (t_f - t_3).$$

Перегруппировывая члены, получаем

$$D + m_2 l = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_3] t_f,$$

так что

$$t_f = \frac{D + m_2 l}{m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_3}, \quad m_{\text{water}} = 0, \quad m_{\text{ice}} = m_2 + m_3.$$

Эти случаи исчерпывают все возможные состояния равновесия.

**b)**

Калориметр и вода могут выделить

$$A = (1.00 \times 0.1 + 1.00 \times 1) \times 10 = 11.0 \text{ kcal}$$

при охлаждении до  $0^\circ\text{C}$ .

Количество теплоты, необходимое для нагревания исходного льда до нуля, равно

$$B = 2.00 \times 0.492 \times 20 = 19.68 \text{ kcal}.$$

Следовательно,

$$D = A - B = -8.68 \text{ kcal}.$$

Поскольку

$$-m_2 l = -78.7 \text{ kcal} < D < 0,$$

замерзает лишь часть исходной воды, а равновесная температура равна  $0^\circ\text{C}$ .

Масса замерзающей воды равна

$$y = \frac{B - A}{l} = \frac{8.68 \text{ kcal}}{78.7 \text{ kcal/kg}} = 0.110292 \dots \text{ kg}.$$

Таким образом,

$$m_{\text{water}} = 1.00 - y = 0.890 \text{ kg},$$

$$m_{\text{ice}} = 2.00 + y = 2.11 \text{ kg}, \quad t_f = 0^\circ\text{C}.$$

Решение проверено по официальному решению.

### Задача 3: Заряженный шарик, подвешенный на оси заряженного кольца

Маленький заряженный шарик массой  $m$  и с зарядом  $q$  подвешен к верхней точке кольца радиусом  $R$  на непроводящей нити пренебрежимо малой массы. Кольцо изготовлено из жёсткой проволоки пренебрежимо малого поперечного сечения и расположено в вертикальной плоскости. По кольцу равномерно распределён заряд  $Q$  того же знака, что и  $q$ . Определите длину  $l$  нити, при которой положение равновесия шарика находится на оси симметрии, перпендикулярной плоскости кольца.

Сначала найдите решение в общем виде, а затем для конкретных значений  $Q = q = 9.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ ,  $R = 5 \text{ cm}$ ,  $m = 1.0 \text{ g}$ ,  $\epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

## Ответы

- 3. Для равновесия на оси **вне центра кольца**

$$l = \left( \frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3},$$

при условии

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

Два возможных положения имеют координаты вдоль оси  $x = \pm\sqrt{l^2 - R^2}$ . Для заданных значений

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

Существует также особое положение равновесия в центре при  $l = R$ , в котором условие статического равновесия сил выполняется всегда. Для заданных значений ему соответствует  $l = 5 \text{ cm}$ , и это равновесие неустойчиво.

## Решение

3. Будем считать маленький шарик точечным зарядом, поле тяжести — однородным и использовать заданное равномерное распределение заряда по кольцу. Невесомая нить действует на шарик силой натяжения, направленной вдоль неё.

Пусть  $O$  — центр кольца,  $A$  — его верхняя точка, а  $P$  — положение шарика на оси, перпендикулярной плоскости кольца. Сначала рассмотрим  $OP = x > 0$ . Поскольку  $OA = R$  перпендикулярно  $OP$ ,

$$l^2 = R^2 + x^2.$$

В силу симметрии составляющие напряжённости электрического поля, параллельные плоскости кольца, взаимно компенсируются. Каждый элемент заряда  $dQ$  находится на расстоянии  $\sqrt{R^2 + x^2} = l$  от шарика. Поэтому по закону Кулона результирующая электрическая сила, направленная вдоль оси, равна

$$F_e = \int \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{x}{l} = \frac{Qq x}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

Поскольку  $Qq > 0$ , эта сила направлена от кольца.

Сила натяжения  $T$  направлена из  $P$  к  $A$ . Её составляющая, направленная вверх, равна  $TR/l$ , а составляющая, направленная к плоскости кольца, равна  $Tx/l$ . Условия равновесия по вертикали и горизонтали имеют вид

$$\frac{TR}{l} = mg, \quad \frac{Tx}{l} = \frac{Qq x}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

Из первого уравнения получаем  $T/l = mg/R$ . Подставляя это выражение во второе уравнение и сокращая на  $x \neq 0$ , получаем

$$\frac{mg}{R} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^3},$$

откуда

$$l = \left( \frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}.$$

Для ненулевого смещения вдоль оси необходимо  $l > R$ , поэтому это решение существует только при условии

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

Если это условие выполняется, то в силу зеркальной симметрии существуют два положения равновесия, по одному с каждой стороны кольца:

$$x = \pm \sqrt{\left( \frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{2/3} - R^2}.$$

Для численного расчёта используем  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ,  $R = 0.050 \text{ m}$  и  $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$ . Тогда

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 mgR^2} \approx 2.96 > 1,$$

так что искомое положение равновесия вне центра существует. Соответствующая длина нити равна

$$l = \left[ \frac{(9.0 \times 10^{-8})^2 (0.050)}{4\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^{-3})(9.8)} \right]^{1/3} = 0.07176 \text{ m}.$$

Таким образом,

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

Соответствующее расстояние от центра кольца составляет приблизительно 5.1 cm.

Наконец, сокращение на  $x$  исключает отдельный случай. При  $x = 0$  напряжённость электрического поля равна нулю в силу симметрии, а  $l = R$ ,  $T = mg$  обеспечивают равновесие в центре при любой величине заряда. Чтобы проверить этот случай для заданных значений, немного сместим шарик перпендикулярно плоскости кольца. В первом приближении по смещению электрическая сила равна  $Qqx/(4\pi\epsilon_0 R^3)$ , а возвращающая горизонтальная составляющая силы натяжения равна  $mgx/R$ . Следовательно,

$$F_x \simeq \left( \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{mg}{R} \right) x.$$

Для заданных значений коэффициент положителен, поэтому это смещение увеличивается: равновесие в центре неустойчиво.

---

Решение проверено по официальному решению.

## Задача 4: Интерференция в воздушном слое между стеклянной пластинкой и кубом

Над стеклянным кубом с длиной ребра 2 см расположена стеклянная пластинка так, что между ними остаётся тонкий воздушный слой, см. рисунок 5.

Электромагнитное излучение с длиной волны от 400 nm до 1150 nm (для которого пластинка прозрачна), падающее сверху перпендикулярно пластинке, отражается от обеих границ воздушного слоя и интерферирует. В этом диапазоне максимальное усиление наблюдается только для двух длин волн, одна из которых равна  $\lambda = 400 \text{ nm}$ . Найдите вторую длину волны. Определите, на сколько необходимо нагреть куб, чтобы он коснулся пластинки. Коэффициент линейного теплового расширения равен  $\alpha = 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , показатель преломления воздуха  $n = 1$ . Расстояние от нижней грани куба до пластинки при нагревании не изменяется.

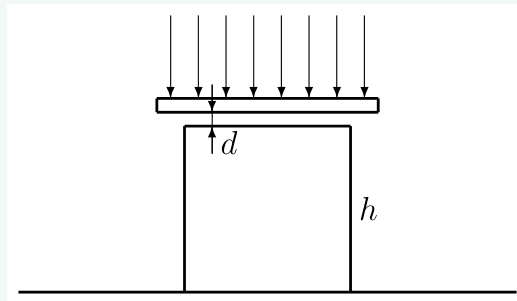


Рисунок 5:

Условие переведено с официального английского текста.

### Ответы

- Вторая длина волны:  $\lambda_2 \approx 667 \text{ nm}$ .
- Необходимый нагрев: повысить температуру куба на  $\Delta T \approx 3.1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Начальная толщина воздушного зазора равна  $d = 500 \text{ nm}$ .

### Решение

**Вторая длина волны.** Пусть  $d$  — толщина воздушного слоя. На его верхней границе отражение происходит при падении света из стекла на границу с воздухом и не сопровождается скачком фазы. На нижней границе отражение происходит при падении света из воздуха на границу со стеклом и сопровождается скачком фазы на  $\pi$ .

При нормальном падении дополнительный оптический путь, пройденный вторым отражённым лучом, равен  $2nd$ . Таким образом, разность фаз равна

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd}{\lambda} + \pi.$$

Для интерференционного усиления разность фаз должна быть кратна  $2\pi$ , откуда

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

При  $n = 1$  длины волн, соответствующие максимумам отражения, поэтому равны

$$\lambda_m = \frac{4d}{2m + 1}.$$

Пусть максимум при 400 nm имеет порядок  $m$ . Тогда

$$4d = (2m + 1)(400 \text{ nm}).$$

Большим порядкам соответствуют длины волн меньше 400 nm, поэтому второй максимум в указанном интервале должен иметь порядок  $m - 1$ . Следовательно,  $m \geq 1$ , и

$$\lambda_{m-1} = 400 \frac{2m + 1}{2m - 1} \text{ nm} \leq 1150 \text{ nm}.$$

После преобразований получаем

$$m \geq \frac{31}{30},$$

так что  $m \geq 2$ .

Третьего максимума в этом интервале быть не должно. Поэтому следующая бо́льшая длина волны, соответствующая порядку  $m - 2$ , должна удовлетворять условию

$$\lambda_{m-2} = 400 \frac{2m + 1}{2m - 3} \text{ nm} > 1150 \text{ nm}.$$

Отсюда получаем

$$m < \frac{77}{30}.$$

Единственное целое число, удовлетворяющее обоим ограничениям, —  $m = 2$ . Следовательно,

$$d = \frac{5(400 \text{ nm})}{4} = \boxed{500 \text{ nm}},$$

а вторая длина волны равна

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{4d}{3} = \frac{2000}{3} \text{ nm} \approx 667 \text{ nm}}.$$

Для проверки отметим, что следующий максимум со стороны больших длин волн находится при 2000 nm, а со стороны меньших — при  $2000/7 \approx 286 \text{ nm}$ ; оба лежат вне заданного интервала.

**Необходимый нагрев.** Начальная высота куба равна

$$h = 2 \text{ cm} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Поскольку расстояние от его нижней грани до пластинки остаётся постоянным, соприкосновение происходит, когда его высота увеличивается на  $d$ .

Используя закон линейного теплового расширения с заданным постоянным коэффициентом,

$$\Delta h = \alpha h \Delta T = d,$$

получаем

$$\Delta T = \frac{d}{\alpha h} = \frac{5.0 \times 10^{-7}}{(8.0 \times 10^{-6})(2.0 \times 10^{-2})} ^\circ\text{C} = 3.125 ^\circ\text{C}.$$

Таким образом, необходимое повышение температуры равно

$$\Delta T \approx 3.1 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad (\text{что эквивалентно } 3.1 \text{ K}).$$

Относительное удлинение составляет всего  $d/h = 2.5 \times 10^{-5}$ , что согласуется с линейным приближением.

---

Решение проверено по официальному решению.