

IPhO 1969

Problemas teóricos y soluciones · Brno, Checoslovaquia · 4 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1969/

Problema 1: Tres carritos conectados por una cuerda que pasa por una polea

La figura 1 muestra un sistema mecánico formado por tres carritos A , B y C de masas $m_1 = 0.3 \text{ kg}$, $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ y $m_3 = 1.5 \text{ kg}$, respectivamente. Los carritos B y A están conectados por una cuerda ligera, tensa e inextensible que pasa por una polea ligera y sin rozamiento, fijada al carrito C , como se muestra en la figura. En este problema pueden despreciarse todas las fuerzas de resistencia y de rozamiento, así como los momentos de inercia de la polea y de las ruedas de los tres carritos. Tome la aceleración de la gravedad g igual a 9.81 m s^{-2} .

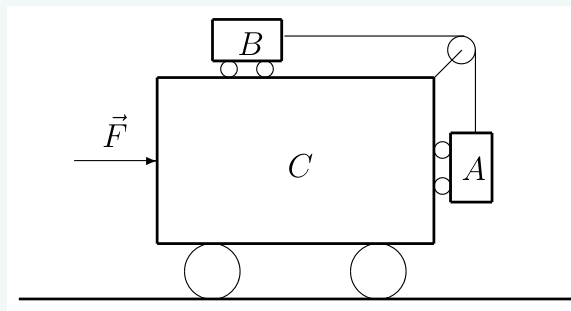


Figura 1:

1. Se aplica ahora una fuerza horizontal $\vec{F}$ al carrito C , como se muestra en la figura. El módulo de $\vec{F}$ es tal que los carritos A y B permanecen en reposo respecto al carrito C .
 - a) Halle la tensión de la cuerda que conecta los carritos A y B .
 - b) Determine el módulo de $\vec{F}$.
2. Más tarde, se mantiene inmóvil el carrito C , mientras que los carritos A y B se sueltan desde el reposo.
 - a) Determine las aceleraciones de los carritos A y B .
 - b) Calcule también la tensión de la cuerda.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **1(a):** $T = 2.94 \text{ N}$.
- **1(b):** $F = 29.4 \text{ N}$.
- **2(a):** El carrito A acelera **hacia abajo** a 5.89 m s^{-2} ; el carrito B acelera **hacia la derecha, hacia la polea**, a 5.89 m s^{-2} .
- **2(b):** $T = 1.18 \text{ N}$.

Solución

La cuerda ligera y la polea ideal hacen que la tensión T sea la misma en toda la cuerda. Al despreciar el rozamiento, cada fuerza de contacto es perpendicular a la superficie de apoyo correspondiente. Aplicamos la segunda ley de Newton en el sistema de referencia del suelo.

1(a)

Como A permanece en reposo respecto a C , y C se mueve horizontalmente, A no tiene aceleración vertical. Las fuerzas verticales que actúan sobre él son su peso m_1g , hacia abajo, y la tensión T , hacia arriba. Por tanto,

$$T - m_1g = 0,$$

de donde

$$T = m_1g = 0.3(9.81) = 2.943 \text{ N} \simeq 2.94 \text{ N}.$$

La fuerza normal horizontal ejercida por C produce la aceleración horizontal de A .

1(b)

Sea a_C la aceleración horizontal común a los tres carritos. La única fuerza horizontal que actúa sobre B es la tensión de la cuerda, por lo que

$$T = m_2a_C.$$

En consecuencia,

$$a_C = \frac{m_1g}{m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.2} = 14.715 \text{ m s}^{-2}.$$

Para el sistema completo formado por los carritos, la cuerda y la polea, las fuerzas de contacto y las fuerzas ejercidas por la cuerda son internas. La única fuerza horizontal externa es F . Por tanto,

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_C = \frac{m_1(m_1 + m_2 + m_3)}{m_2}g.$$

Numéricamente,

$$F = (0.3 + 0.2 + 1.5)(14.715) = 29.43 \text{ N} \simeq 29.4 \text{ N}.$$

2(a)

Al mantener C inmóvil, la polea queda fija. Si A se desplaza hacia abajo una distancia s , el tramo vertical de la cuerda se alarga en s . Como la cuerda está tensa y es inextensible, el tramo horizontal debe acortarse en la misma cantidad: B se desplaza hacia la polea una distancia s . Por tanto, sus aceleraciones tienen el mismo módulo.

Sea a este módulo, tomando como sentido positivo el sentido hacia abajo para A y hacia la derecha para B . La segunda ley de Newton da

$$m_1g - T = m_1a$$

para A , y

$$T = m_2a$$

para B . Al sumar se elimina la tensión:

$$m_1g = (m_1 + m_2)a.$$

De aquí,

$$a = \frac{m_1g}{m_1 + m_2} = \frac{0.3(9.81)}{0.3 + 0.2} = 5.886 \text{ m s}^{-2} \simeq 5.89 \text{ m s}^{-2}.$$

Así, A acelera hacia abajo y B acelera horizontalmente hacia la derecha, hacia la polea.

2(b)

Usando la ecuación horizontal para B ,

$$T = m_2a = \frac{m_1m_2g}{m_1 + m_2}.$$

Por tanto,

$$T = 0.2(5.886) = 1.1772 \text{ N} \simeq 1.18 \text{ N}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Hielo introducido en agua en un calorímetro de cobre

Un calorímetro de cobre de masa m_1 contiene agua de masa m_2 . Ambos se encuentran a la temperatura t_2 . Se deja caer en el calorímetro un trozo de hielo de masa m_3 y temperatura $t_3 < 0^\circ\text{C}$.

a) Determine la temperatura y las masas de agua y hielo en el estado de equilibrio para valores generales de m_1, m_2, m_3, t_2 y t_3 . Escriba las ecuaciones de equilibrio para todos los procesos posibles que deban considerarse.

b) Halle la temperatura final y las masas finales de agua y hielo para $m_1 = 1.00 \text{ kg}$, $m_2 = 1.00 \text{ kg}$, $m_3 = 2.00 \text{ kg}$, $t_2 = 10^\circ\text{C}$, $t_3 = -20^\circ\text{C}$.

Desprecie las pérdidas de energía y suponga que la presión barométrica es normal. El calor específico del cobre es $c_1 = 0.1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, el calor específico del agua es $c_2 = 1 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$, el calor específico del hielo es $c_3 = 0.492 \text{ kcal/kg} \cdot ^\circ\text{C}$ y el calor latente de fusión del hielo es $l = 78,7 \text{ kcal/kg}$. Tome $1 \text{ cal} = 4.2 \text{ J}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- a) Definamos la masa total de agua y hielo y el excedente de calor a 0°C :

$$M = m_2 + m_3, \quad D = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2 + m_3c_3t_3.$$

La temperatura de equilibrio t_f y las masas son:

Condición	t_f	Masa final de agua líquida	Masa final de hielo
$D < -m_2l$	$\frac{D + m_2l}{m_1c_1 + Mc_3} < 0$	0	M
$-m_2l \leq D \leq m_3l$	0°C	$m_2 + \frac{D}{l}$	$m_3 - \frac{D}{l}$
$D > m_3l$	$\frac{D - m_3l}{m_1c_1 + Mc_2} > 0$	M	0

En el régimen intermedio, $D < 0$ provoca congelación, $D > 0$ provoca fusión y $D = 0$ deja inalteradas las masas de las fases. Los extremos corresponden a un estado formado enteramente por hielo o enteramente por agua a 0°C .

- b)

$$t_f = 0^\circ\text{C}, \quad m_{\text{water}} = 0.890 \text{ kg}, \quad m_{\text{ice}} = 2.11 \text{ kg}.$$

Se congelan aproximadamente 0.110 kg del agua inicial.

Solución

a)

Sin pérdidas de calor, el calor liberado durante el enfriamiento y la congelación es igual al calor absorbido durante el calentamiento y la fusión. Utilizamos los calores específicos y el calor latente proporcionados como constantes. A presión barométrica normal, el agua líquida y el hielo coexisten en equilibrio a 0°C .

Sea

$$A = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2$$

el calor liberado cuando el calorímetro y el agua inicial se enfrían hasta 0°C , y sea

$$B = m_3c_3(0 - t_3)$$

el calor necesario para calentar el hielo inicial hasta 0°C . Su diferencia es

$$D = A - B = (m_1c_1 + m_2c_2)t_2 + m_3c_3t_3.$$

Los procesos posibles se deducen al comparar esta diferencia con los calores latentes disponibles.

Fusión parcial, con temperatura final de 0°C .

Si $0 \leq D \leq m_3l$, el excedente de calor sensible funde una masa x de hielo. La ecuación de equilibrio es

$$(m_1c_1 + m_2c_2)t_2 = m_3c_3(0 - t_3) + xl,$$

o bien $A = B + xl$. Por tanto,

$$x = \frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$

$$m_{\text{water}} = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 - \frac{D}{l}.$$

Cuando $D = 0$, no se produce ningún cambio neto de fase. Cuando $D = m_3 l$, se funde el último resto de hielo y el estado final está formado enteramente por agua a 0°C .

Fusión completa, con temperatura final superior a 0°C .

Si $D > m_3 l$, todo el hielo se funde. El calorímetro y el agua inicial se enfrían de t_2 a t_f , mientras que el hielo añadido se calienta hasta cero, se funde y después se calienta como agua líquida hasta t_f :

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2)(t_2 - t_f) = m_3 c_3(0 - t_3) + m_3 l + m_3 c_2 t_f.$$

Agrupando los términos que contienen t_f , se obtiene

$$D - m_3 l = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2] t_f.$$

Por tanto,

$$t_f = \frac{D - m_3 l}{m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_2}, \quad m_{\text{water}} = m_2 + m_3, \quad m_{\text{ice}} = 0.$$

Congelación parcial, con temperatura final de 0°C .

Si $-m_2 l \leq D < 0$, el enfriamiento del calorímetro y del agua hasta cero no proporciona suficiente calor para calentar el hielo inicial hasta cero. Debe congelarse una masa y del agua inicial, liberando calor latente:

$$(m_1 c_1 + m_2 c_2) t_2 + y l = m_3 c_3(0 - t_3).$$

De ahí,

$$y = -\frac{D}{l}, \quad t_f = 0^\circ\text{C},$$

$$m_{\text{water}} = m_2 - y = m_2 + \frac{D}{l}, \quad m_{\text{ice}} = m_3 + y = m_3 - \frac{D}{l}.$$

Cuando $D = -m_2 l$, toda el agua inicial se congela y queda únicamente hielo a 0°C .

Congelación completa, con temperatura final inferior a 0°C .

Si $D < -m_2 l$, ni siquiera la congelación de toda el agua inicial puede llevar el sistema a cero. El estado final contiene únicamente hielo a $t_f < 0$.

El calorímetro se enfría de t_2 a t_f . El agua inicial se enfría hasta cero, se congela y después se enfría como hielo hasta t_f . El calor que liberan calienta el hielo inicial de t_3 a t_f :

$$m_1 c_1(t_2 - t_f) + m_2 c_2 t_2 + m_2 l + m_2 c_3(0 - t_f) = m_3 c_3(t_f - t_3).$$

Reordenando,

$$D + m_2 l = [m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_3] t_f,$$

por lo que

$$t_f = \frac{D + m_2 l}{m_1 c_1 + (m_2 + m_3) c_3}, \quad m_{\text{water}} = 0, \quad m_{\text{ice}} = m_2 + m_3.$$

Estos casos abarcan todos los estados de equilibrio posibles.

b)

El calorímetro y el agua pueden liberar

$$A = (1.00 \times 0.1 + 1.00 \times 1) \times 10 = 11.0 \text{ kcal}$$

al enfriarse hasta 0°C .

El calor necesario para calentar el hielo inicial hasta cero es

$$B = 2.00 \times 0.492 \times 20 = 19.68 \text{ kcal}.$$

En consecuencia,

$$D = A - B = -8.68 \text{ kcal}.$$

Como

$$-m_2 l = -78.7 \text{ kcal} < D < 0,$$

solo se congela una parte del agua inicial, y la temperatura de equilibrio es 0°C .

La masa que se congela es

$$y = \frac{B - A}{l} = \frac{8.68 \text{ kcal}}{78.7 \text{ kcal/kg}} = 0.110292 \dots \text{ kg}.$$

Por tanto,

$$m_{\text{water}} = 1.00 - y = 0.890 \text{ kg},$$

$$m_{\text{ice}} = 2.00 + y = 2.11 \text{ kg}, \quad t_f = 0^\circ\text{C}.$$

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Esfera cargada suspendida sobre el eje de un anillo cargado

Una pequeña esfera cargada de masa m y carga q está suspendida del punto más alto de un anillo de radio R mediante un hilo aislante de masa despreciable. El anillo está hecho de un alambre rígido de sección transversal despreciable y se encuentra en un plano vertical. Sobre el anillo hay una carga Q uniformemente distribuida, del mismo signo que q . Determine la longitud l del hilo para que la posición de equilibrio de la esfera se encuentre sobre el eje de simetría perpendicular al plano del anillo.

Obtenga primero la solución general y luego la correspondiente a los valores particulares $Q = q = 9.0 \cdot 10^{-8} \text{ C}$, $R = 5 \text{ cm}$, $m = 1.0 \text{ g}$, $\epsilon_0 = 8.9 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- 3. Para el equilibrio sobre el eje **fuera del centro del anillo**,

$$l = \left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3},$$

siempre que

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

Las dos posiciones posibles se encuentran a distancias axiales $x = \pm\sqrt{l^2 - R^2}$. Para los datos dados,

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

Existe también el caso especial de equilibrio en el centro, $l = R$, que siempre satisface el balance estático de fuerzas. Para estos datos, corresponde a $l = 5 \text{ cm}$ y es inestable.

Solución

3. Se trata la pequeña esfera como una carga puntual, se considera uniforme la gravedad y se utiliza la distribución uniforme de carga indicada para el anillo. El hilo sin masa ejerce una tensión a lo largo de su longitud.

Sean O el centro del anillo, A su punto más alto y P la posición de la esfera sobre el eje perpendicular. Consideremos primero $OP = x > 0$. Como $OA = R$ es perpendicular a OP ,

$$l^2 = R^2 + x^2.$$

Por simetría, las componentes del campo eléctrico paralelas al plano del anillo se anulan entre sí. Cada elemento de carga dQ se encuentra a una distancia $\sqrt{R^2 + x^2} = l$ de la esfera. Por tanto, la ley de Coulomb da la fuerza eléctrica resultante a lo largo del eje:

$$F_e = \int \frac{q dQ}{4\pi\epsilon_0 l^2} \frac{x}{l} = \frac{Qq x}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

Como $Qq > 0$, esta fuerza apunta en sentido opuesto al anillo.

La tensión T apunta desde P hacia A . Su componente hacia arriba es TR/l , y su componente hacia el plano del anillo es Tx/l . El equilibrio vertical y horizontal exige

$$\frac{TR}{l} = mg, \quad \frac{Tx}{l} = \frac{Qq x}{4\pi\epsilon_0 l^3}.$$

La primera ecuación da $T/l = mg/R$. Sustituyendo en la segunda y simplificando el factor $x \neq 0$,

$$\frac{mg}{R} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 l^3},$$

de donde

$$l = \left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg} \right)^{1/3}.$$

Un desplazamiento axial distinto de cero requiere $l > R$, por lo que esta solución existe solo si

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} > mgR^2.$$

Cuando se cumple esta condición, la simetría de reflexión da dos posiciones de equilibrio, una a cada lado del anillo:

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{QqR}{4\pi\epsilon_0 mg}\right)^{2/3} - R^2}.$$

Para el cálculo numérico, se utilizan $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$, $R = 0.050 \text{ m}$ y $m = 1.0 \times 10^{-3} \text{ kg}$. Entonces

$$\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 mgR^2} \approx 2.96 > 1,$$

por lo que existe el equilibrio requerido fuera del centro. La longitud del hilo correspondiente es

$$l = \left[\frac{(9.0 \times 10^{-8})^2(0.050)}{4\pi(8.9 \times 10^{-12})(1.0 \times 10^{-3})(9.8)} \right]^{1/3} = 0.07176 \text{ m}.$$

Por tanto,

$$l \approx 7.2 \text{ cm}.$$

La distancia correspondiente al centro del anillo es aproximadamente 5.1 cm.

Finalmente, la simplificación del factor x excluye un caso que debe tratarse por separado. En $x = 0$, el campo eléctrico se anula por simetría, y $l = R$, $T = mg$ dan un equilibrio en el centro para cualquier magnitud de la carga. Para comprobar este caso con los datos proporcionados, desplazemos ligeramente la esfera en dirección perpendicular al anillo. A primer orden, la fuerza eléctrica es $Qqx/(4\pi\epsilon_0 R^3)$, mientras que la componente horizontal restauradora de la tensión es mgx/R . Por tanto,

$$F_x \simeq \left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{mg}{R} \right) x.$$

El coeficiente es positivo para los datos dados, por lo que este desplazamiento aumenta: el equilibrio en el centro es inestable.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 4: Interferencia en una capa de aire entre una placa de vidrio y un cubo

Se coloca una placa de vidrio sobre un cubo de vidrio de 2 cm de arista de tal manera que entre ambos queda una fina capa de aire, véase la Figura 5.

Una radiación electromagnética de longitud de onda comprendida entre 400 nm y 1150 nm (para la cual la placa es transparente), que incide perpendicularmente sobre la placa desde arriba, se refleja en ambas superficies de la capa de aire y produce interferencia. En este intervalo, solo dos longitudes de onda producen máximos de interferencia constructiva; una de ellas es

$\lambda = 400 \text{ nm}$. Halle la segunda longitud de onda. Determine cuánto es necesario calentar el cubo para que llegue a tocar la placa. El coeficiente de dilatación térmica lineal es $\alpha = 8.0 \cdot 10^{-6} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, y el índice de refracción del aire es $n = 1$. La distancia entre la base del cubo y la placa no cambia durante el calentamiento.

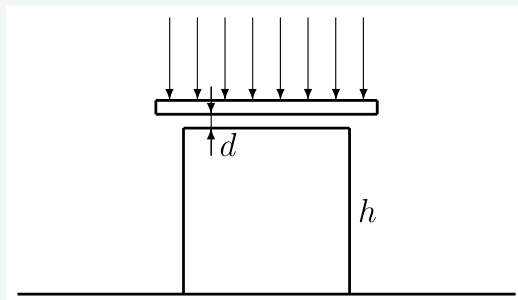


Figura 5:

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Segunda longitud de onda:** $\lambda_2 \approx 667 \text{ nm}$.
- **Calentamiento necesario:** aumentar la temperatura del cubo en $\Delta T \approx 3.1 \text{ }^{\circ}\text{C}$. El espesor inicial de la capa de aire es $d = 500 \text{ nm}$.

Solución

Segunda longitud de onda. Sea d el espesor de la capa de aire. En su superficie superior, la reflexión se produce del vidrio hacia el aire y no introduce ninguna inversión de fase. En su superficie inferior, la reflexión se produce del aire hacia el vidrio e introduce una inversión de fase de π .

Con incidencia normal, el camino óptico adicional recorrido por el segundo rayo reflejado es $2nd$. Por tanto, la diferencia de fase es

$$\Delta\phi = \frac{4\pi nd}{\lambda} + \pi.$$

La interferencia constructiva requiere un múltiplo entero de 2π , lo que da

$$2nd = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Con $n = 1$, las longitudes de onda de los máximos de reflexión son, por tanto,

$$\lambda_m = \frac{4d}{2m + 1}.$$

Sea m el orden del máximo correspondiente a 400 nm . Entonces

$$4d = (2m + 1)(400 \text{ nm}).$$

Los órdenes mayores dan longitudes de onda inferiores a 400 nm , por lo que el segundo máximo del intervalo especificado debe tener orden $m - 1$. En consecuencia, $m \geq 1$, y

$$\lambda_{m-1} = 400 \frac{2m+1}{2m-1} \text{ nm} \leq 1150 \text{ nm}.$$

Al reordenar se obtiene

$$m \geq \frac{31}{30},$$

por lo que $m \geq 2$.

No debe haber un tercer máximo en el intervalo. Por tanto, la siguiente longitud de onda mayor, correspondiente al orden $m - 2$, debe satisfacer

$$\lambda_{m-2} = 400 \frac{2m+1}{2m-3} \text{ nm} > 1150 \text{ nm}.$$

Esto da

$$m < \frac{77}{30}.$$

El único entero que satisface ambas cotas es $m = 2$. Por tanto,

$$d = \frac{5(400 \text{ nm})}{4} = \boxed{500 \text{ nm}},$$

y la segunda longitud de onda es

$$\lambda_2 = \frac{4d}{3} = \frac{2000}{3} \text{ nm} \approx 667 \text{ nm}.$$

Como comprobación, el siguiente máximo de longitud de onda mayor se encuentra en 2000 nm , mientras que el siguiente de longitud de onda menor se encuentra en $2000/7 \approx 286 \text{ nm}$; ambos quedan fuera del intervalo dado.

Calentamiento necesario. El cubo tiene inicialmente una altura

$$h = 2 \text{ cm} = 2.0 \times 10^{-2} \text{ m}.$$

Como la distancia entre su base y la placa permanece fija, el contacto se produce cuando su altura aumenta en d .

Aplicando la dilatación térmica lineal con el coeficiente constante dado,

$$\Delta h = \alpha h \Delta T = d,$$

por lo que

$$\Delta T = \frac{d}{\alpha h} = \frac{5.0 \times 10^{-7}}{(8.0 \times 10^{-6})(2.0 \times 10^{-2})} ^\circ\text{C} = 3.125 ^\circ\text{C}.$$

Por tanto, el aumento de temperatura necesario es

$$\boxed{\Delta T \approx 3.1 ^\circ\text{C} \quad (\text{equivalentemente, } 3.1 \text{ K})}.$$

La dilatación relativa es de solo $d/h = 2.5 \times 10^{-5}$, lo que es coherente con la aproximación lineal.

La solución se comprobó con la solución oficial.