

IPhO 1968

理论题与解答 · 匈牙利布达佩斯 · 3 道理论题及完整解答

eulersolve.org/ipho/1968/

题目 1：斜面上用细绳连接的实心圆柱体和物块

在倾角为 30° 的斜面上，质量为 $m_2 = 4 \text{ kg}$ 的物块通过一根轻绳与质量为 $m_1 = 8 \text{ kg}$ 、半径为 $r = 5 \text{ cm}$ 的实心圆柱体相连（图 1）。求释放两物体后它们的加速度。物块与斜面之间的摩擦系数为 $\mu = 0.2$ 。轴承处的摩擦和滚动摩擦均可忽略。

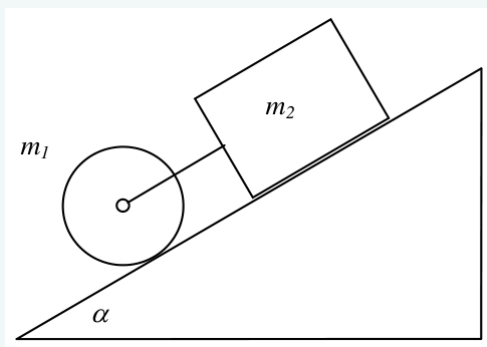


图 1

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 1：两物体均沿斜面向下加速运动，加速度为

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

此数值采用 $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ 。

解答

题目 1

将细绳视为质量可忽略且不可伸长，并假设圆柱体做无滑动滚动。在细绳绷紧的情况下，两物体具有相同的加速度 a 。取沿斜面向下为正方向，并记 $\theta = 30^\circ$ 。

细绳通过圆柱体中心的轴承施力，因此绳的张力对圆柱体的轴线不产生力矩。滚动摩擦可忽略意味着不存在滚动阻力矩；接触处的静摩擦力仍提供转动所需的力矩。

设 T 为绳的张力， f 为圆柱体受到的静摩擦力，其方向沿斜面向上。

对于物块，细绳沿斜面向下拉它。物块受到的支持力和滑动摩擦力分别为

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

因此，沿斜面方向应用牛顿第二定律，得到

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

对于圆柱体，张力和静摩擦力均沿斜面向上：

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

实心圆柱体绕其轴线的转动惯量为

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

若其角加速度的大小为 β ，则无滑动滚动要求 $a = r\beta$ 。因此，绕其中心的转动方程为

$$fr = I\beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

从而

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

将 (1) 和 (2) 相加，再代入 (3)，消去张力，得到

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

因此

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

由于 $I/r^2 = m_1/2$ ，半径被约去。

代入数值得

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

所以

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{沿斜面向下.}$$

最后，假设细绳绷紧，就必须要求张力为正。由 (1)，

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

因此，这一两物体具有相同加速度的解与细绳只能拉、不能推的性质相符。

解答已与官方解答核对。

题目 2：混合两份温度不同的甲苯

一个玻璃杯中装有温度为 0°C 的甲苯 300 cm^3 ，另一个玻璃杯中装有温度为 100°C 的甲苯 110 cm^3 。（两者的体积之和为 410 cm^3 。）求两份液体混合后的最终体积。甲苯的体积膨胀系数为 $\beta = 0.001(^{\circ}\text{C})^{-1}$ 。忽略热量损失。

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2: 最终体积为 $\boxed{410 \text{ cm}^3}$ 。

解答

对于质量一定的物质，采用标准的线性热膨胀定律，

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

其中， t 是以 0°C 为基准测量的温度。假设甲苯的比热容为常量，且玻璃杯的热容可以忽略。

首先确定**质量比**，因为热交换量取决于质量。热甲苯在 0°C 时的体积应为

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001 \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

在相同温度下，两份甲苯的密度相同，因此

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

根据能量守恒，冷甲苯吸收的热量必须等于热甲苯放出的热量：

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

约去两边相同的比热容 c ，并代入质量比，得

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

混合后的液体在 0°C 时的体积应为 $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ 。因此，其在最终温度下的体积为

$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001 \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = \boxed{410 \text{ cm}^3}.$$

等价地，冷甲苯膨胀至 307.5 cm^3 ，而热甲苯收缩至 102.5 cm^3 。在线性膨胀模型中，两者的体积变化相互抵消。

解答已与官方解答核对。

题目 3：经玻璃半圆柱折射的平行光线

平行光线以 45° 的入射角射到玻璃半圆柱的平面表面上，光线所在的平面垂直于半圆柱的轴线（图 4）。（折射率为 $\sqrt{2}$ 。）光线从圆柱曲面的哪些位置射出？

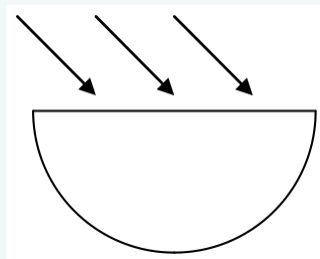


图 4

答案

- **题目 3.** 从水平直径的右端起，沿顺时针方向量取圆心角 ϕ 。光线从以下两个角度所界定的圆弧射出：

$$\phi = 15^\circ \quad \text{和} \quad \phi = 105^\circ.$$

这段圆弧所对的圆心角为 90° ，弧长为 $\pi R/2$ ，其中 R 为圆柱的半径。边界处的光线沿切线方向射出。

解答

题目 3. 我们采用几何光学方法，将周围空气的折射率取为 1，并在光线能够透射时忽略部分反射。但必须考虑全反射。

在平面表面处，由斯涅尔定律可得相对于法线量取的折射角 r ：

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

因此

$$r = 30^\circ.$$

所以，玻璃内的光线向右下方传播，与水平向右的方向成向下 60° 的夹角。

设 O 为半圆形截面的圆心。在表面上的点 P 处，外法线沿半径 OP 的方向。定义 ϕ 为从水平向右的方向沿顺时针方向量取的该半径的角度。对于直接到达此曲面的光线，其入射角为

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

光线从玻璃射向空气时的临界角 i_c 满足

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad i_c = 45^\circ.$$

因此，光线能够射出的条件为

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

即

$$15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ.$$

所以，出射圆弧的起点位于从直径右端向下转过 15° 处，终点位于越过最低点后再向左转过 15° 处。其角度范围和弧长为

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad s = \frac{\pi R}{2}.$$

在任一边界处，由斯涅尔定律可得出射光线与法线的夹角为 90° ，因此边界处的出射光线与圆相切。在 $\phi = 60^\circ$ 处，光线沿法线入射，并沿原方向射出。

我们还必须检查最初发生全反射的光线。设 a 为光线入射点沿直径的坐标，以 O 为原点，向右为正。该光线到 O 的垂直距离为

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} |a|.$$

当光线到达圆柱曲面时，

$$b = R \sin i.$$

圆周处的镜面反射保持这一距离不变，因此光线随后每次到达圆柱曲面时的入射角也保持不变。光线在平面直径处发生的任何反射也保持 b 不变，因为该直径通过 O 。因此，最初在曲面处发生全反射的光线，此后不可能从该曲面的其他部分射出。

构成出射圆弧的光线，恰好是入射位置满足以下条件的那些光线：

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R}.$$

其余入射光线不会在曲面上形成额外的出射区域。

解答已与官方解答核对。