

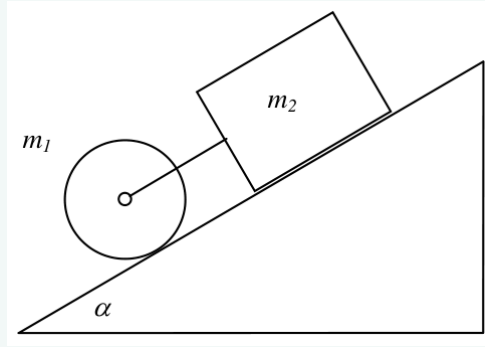
IPhO 1968

Teorik sorular ve çözümler · Budapeşte, Macaristan · 3 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipro/1968/

Soru 1: Eğik düzlem üzerinde bir iple birbirine bağlanmış dolu silindir ve blok

Eğim açısı 30° olan bir eğik düzlem üzerinde, kütlesi $m_2 = 4 \text{ kg}$ olan bir blok, hafif bir iple kütlesi $m_1 = 8 \text{ kg}$, yarıçapı $r = 5 \text{ cm}$ olan dolu bir silindire bağlanmıştır (Şekil 1). Cisimler serbest bırakıldığında ivmelerini bulunuz. Blok ile eğik düzlem arasındaki sürtünme katsayısı $\mu = 0.2$ 'dir. Yataktaki sürtünme ve yuvarlanma sürtünmesi ihmal edilebilir.



Şekil 1

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- Soru 1:** Her iki cisim de **eğik düzlem boyunca aşağı yönde**, şu ivmeyle hareket eder:

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

Sayısal değerin hesaplanmasında $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ kullanılmıştır.

Çözüm

Soru 1

İpi kütlesiz ve uzamaz kabul edelim ve silindirin kaymadan yuvarlandığını varsayalım. İp gergin olduğunda her iki cisim de aynı a ivmesine sahiptir. Düzlem boyunca aşağı yönü pozitif alalım ve $\theta = 30^\circ$ yazalım.

İp, silindirin merkezindeki yatağa kuvvet uygular; dolayısıyla ipin gerilme kuvveti silindirin eksenine göre tork oluşturmaz. Yuvarlanma sürtünmesinin ihmal edilebilir olması, yuvarlanmaya karşı koyan bir direnç torkunun bulunmadığı anlamına gelir; temas noktasındaki statik sürtünme ise dönme için gerekli torku sağlamaya devam eder.

Gerilme kuvveti T , silindire etki eden ve düzlem boyunca yukarı yönelen statik sürtünme kuvveti ise f olsun.

İp, bloğu düzlem boyunca aşağı yönde çeker. Bloğa etki eden normal tepki kuvveti ve kinetik sürtünme kuvveti şöyledir:

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

Dolayısıyla Newton'un ikinci yasası düzlem doğrultusunda şu sonucu verir:

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

Silindir için hem gerilme kuvveti hem de statik sürtünme kuvveti düzlem boyunca yukarı yönde etki eder:

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

Dolu bir silindirin kendi eksenine göre eylemsizlik momenti şöyledir:

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

Açısal ivmesinin büyüklüğü β ise kaymadan yuvarlanma koşulu $a = r\beta$ olmasını gerektirir. Buna göre, merkezine göre dönme denklemi şöyledir:

$$f r = I \beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

ve buradan

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

(1) ve (2) toplanıp ardından (3) yerine konulduğunda gerilme kuvveti elenir:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

Böylece

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

$I/r^2 = m_1/2$ olduğundan yarıçap sadeleşir.

Değerler yerine konulduğunda

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

elde edilir; dolayısıyla

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{düzlem boyunca aşağı yönde.}$$

Son olarak, ipin gergin olduğu varsayımının geçerli olması için gerilme kuvvetinin pozitif olması gerekir.

(1)'den,

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

Dolayısıyla ortak ivme çözümü, çekebilen ancak itemeyen bir ip ile tutarlıdır.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Farklı sıcaklıklardaki iki miktar tolueinin karıştırılması

Bir bardakta 0°C sıcaklıkta 300 cm^3 toluen ve başka bir bardakta 100°C sıcaklıkta 110 cm^3 toluen bulunmaktadır. (Hacimlerin toplamı 410 cm^3 olur.) İki sıvı karıştırıldıktan sonraki son hacmi bulunuz. Toluenin hacimsel genleşme katsayısı $\beta = 0.001(^\circ\text{C})^{-1}$ değerindedir. Isı kaybını ihmal ediniz.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 2:** Son hacim 410 cm^3 olur.

Çözüm

Sabit bir kütle için standart doğrusal ısı genleşme yasasını kullanalım:

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

burada t , 0°C referans alınarak ölçülür. Toluenin özgül ısı kapasitesinin sabit olduğunu ve bardakların ısı kapasitelerinin ihmal edilebilir olduğunu varsayalım.

Önce **kütle oranını** belirleyelim, çünkü ısı alışverişi kütleyle bağlıdır. Sıcak kısmın 0°C sıcaklıktaki hacmi şöyle olurdu:

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001 ^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

Aynı sıcaklıkta her iki kısmın yoğunluğu aynı olduğundan

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

Enerjinin korunumu, soğuk kısmın aldığı ısıнын sıcak kısmın verdiği ısıya eşit olmasını gerektirir:

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

Ortak özgül ısı c sadeleştirilip kütle oranı kullanıldığında

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

Birleştirilmiş sıvı, 0°C sıcaklıkta $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ hacim kaplardı. Dolayısıyla son sıcaklıktaki hacmi

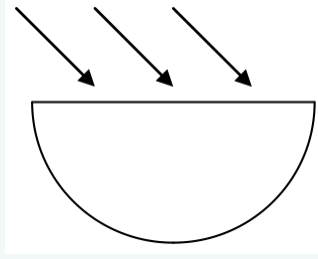
$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001 ^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = 410 \text{ cm}^3.$$

Eşdeğer biçimde, soğuk kısım genişerek 307.5 cm^3 hacme ulaşırken sıcak kısım büzülerek 102.5 cm^3 hacme iner. Doğrusal genişleme modeli çerçevesinde hacim değişimleri birbirini götürür.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Cam bir yarım silindirde kırılan paralel ışınlar

Paralel ışık ışınları, camdan yapılmış bir yarım silindirin düzlem yüzeyine, yarım silindirin eksenine dik bir düzlem içinde, 45° açıyla gelmektedir (Şekil 4). (Kırılma indisi $\sqrt{2}$ 'dir.) Işınlar silindirik yüzeyin neresinden dışarı çıkar?



Şekil 4

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 3.** Merkez açı ϕ 'yi yatay çapın sağ ucundan başlayarak saat yönünde ölçün. Işınlar,

$$\phi = 15^\circ \text{ ve } \phi = 105^\circ.$$

ile sınırlanan yaydan çıkar. Bu yayın gördüğü merkez açı 90° , uzunluğu ise $\pi R/2$ 'dir; burada R silindirin yarıçapıdır. Sınır ışınları teğet doğrultusunda çıkar.

Çözüm

Soru 3. Geometrik optiği kullanıyor, çevredeki havanın kırılma indisini 1 alıyor ve ışığın geçişinin mümkün olduğu durumlarda kısmi yansımaları ihmal ediyoruz. Ancak tam iç yansıma hesaba katılmalıdır.

Düz yüzeyde Snell yasası, normalden ölçülen kırılma açısı r 'yi verir:

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

Buradan

$$r = 30^\circ.$$

Dolayısıyla camın içindeki ışınlar, yatayın 60° altında, aşağıya ve sağa doğru ilerler.

Yarım daire biçimindeki kesitin merkezi O olsun. Eğri yüzey üzerindeki bir P noktasında, dışa dönük normal OP yarıçapı doğrultusundadır. ϕ 'yi, bu yarıçapın sağa doğru yatay doğrultudan başlayarak saat yönünde ölçülen açısı olarak tanımlayalım. Bu yüzeye doğrudan ulaşan bir ışının gelme açısı

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

Camdan havaya geçiş için kritik açı i_c , şu bağıntıyı sağlar:

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{i_c = 45^\circ}.$$

Dolayısıyla ışınların dışarı çıkması,

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

yani

$$\boxed{15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ}.$$

koşulunda mümkündür.

Böylece ışınların çıktığı yay, çapın sağ ucunun 15° altında başlar ve en alt noktayı sola doğru 15° geçince sona erer. Yayın açisal genişliği ve uzunluğu

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad \boxed{s = \frac{\pi R}{2}}.$$

Her iki sınırdaki da Snell yasası normale göre 90° 'lik bir çıkış açısı verir; dolayısıyla sınırdaki çıkan ışınlar çembere teğettir. $\phi = 60^\circ$ 'de ışın yüzeye dik gelir ve yön değiştirmeden çıkar.

Başlangıçta tam iç yansımaya uğrayan ışınları da incelemeliyiz. Bir ışının çap üzerindeki giriş koordinatı, O 'dan ölçülmek ve sağa doğru pozitif olmak üzere, a olsun. Işının O 'ya olan dik uzaklığı

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} |a|.$$

Işın dairesel yüzeye ulaştığında,

$$b = R \sin i.$$

Çemberdeki düzgün yansıma bu uzaklığı, dolayısıyla da dairesel yüzeye sonraki gelişlerde gelme açısını korur. Düz çap yüzeyindeki herhangi bir yansıma da b 'yi korur; çünkü bu çap O 'dan geçer. Bu nedenle eğri yüzeyde ilk gelişinde tam yansımaya uğrayan bir ışın, daha sonra bu yüzeyin başka bir kısmından dışarı çıkamaz.

Çıkış yayına katkıda bulunan ışınlar, tam olarak

$$\frac{\sqrt{3}}{2} |a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R}.$$

aralığından giren ışınlardır. Geriye kalan gelen ışınlar, eğri yüzeyde ışınların çıktığı başka bir bölge oluşturmaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.