

IPhO 1968

Теоретические задачи и решения · Будапешт, Венгрия · 3 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1968/

Задача 1: Сплошной цилиндр и брусок, соединённые нитью на наклонной плоскости

На плоскости с углом наклона 30° брусок массой $m_2 = 4$ кг соединён лёгкой нитью со сплошным цилиндром массой $m_1 = 8$ кг и радиусом $r = 5$ см (рис. 1). Найдите ускорение тел после того, как их отпустят. Коэффициент трения между бруском и наклонной плоскостью $\mu = 0.2$. Трением в подшипнике и трением качения можно пренебречь.

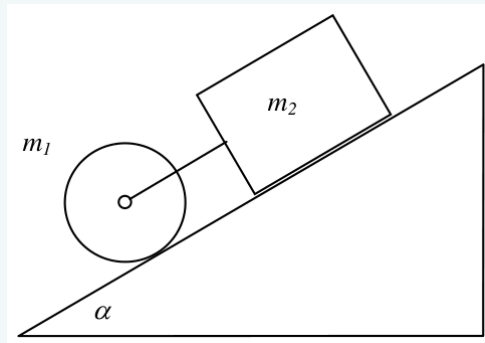


Рисунок 1

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 1:** Оба тела движутся с ускорением, направленным **вниз по наклонной плоскости** и равным

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

Численное значение получено при $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Решение

Задача 1

Считаем нить невесомой и нерастяжимой и предполагаем, что цилиндр катится без проскальзывания. При натянутой нити оба тела имеют одинаковое ускорение a . Выберем направление вниз по плоскости положительным и обозначим $\theta = 30^\circ$.

Сила натяжения нити приложена через центральный подшипник цилиндра, поэтому она не создаёт момента относительно его оси. Пренебрежимо малое трение качения означает отсутствие момента сопротивления качению; при этом сила трения покоя в точке контакта создаёт момент, необходимый для вращения.

Обозначим через T силу натяжения нити, а через f — силу трения покоя, действующую на цилиндр и направленную вверх по плоскости.

Нить тянет брусок вниз по плоскости. Действующие на него нормальная реакция опоры и сила трения скольжения равны

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

Поэтому второй закон Ньютона в проекции на направление вдоль плоскости даёт

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

На цилиндр и сила натяжения нити, и сила трения покоя действуют вверх по плоскости:

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

Момент инерции сплошного цилиндра относительно его оси равен

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

Если модуль его углового ускорения равен β , то условие качения без проскальзывания имеет вид $a = r\beta$. Следовательно, уравнение вращательного движения относительно центра цилиндра записывается как

$$f r = I \beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

откуда

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

Складывая (1) и (2), а затем подставляя (3), исключаем силу натяжения нити:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

Таким образом,

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

Радиус сокращается, поскольку $I/r^2 = m_1/2$.

Подстановка численных значений даёт

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

поэтому

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{вниз по плоскости.}$$

Наконец, предположение о натянутой нити требует положительной силы натяжения. Из (1),

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

Следовательно, решение с одинаковым ускорением обоих тел согласуется с тем, что нить может тянуть, но не может толкать.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Смешивание двух порций толуола при разных температурах

В одном стакане находится 300 cm^3 толуола при температуре 0°C , а в другом — 110 cm^3 толуола при температуре 100°C . (Сумма объёмов составляет 410 cm^3 .) Найдите конечный объём после смешивания двух жидкостей. Коэффициент объёмного расширения толуола $\beta = 0.001(^{\circ}\text{C})^{-1}$. Потерями теплоты пренебречь.

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 2:** Конечный объём равен 410 cm^3 .

Решение

Воспользуемся стандартным линейным законом теплового расширения для неизменной массы:

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

где t отсчитывается от 0°C . Будем считать, что удельная теплоёмкость толуола постоянна, а теплоёмкостями стаканов можно пренебречь.

Сначала определим **отношение масс**, поскольку теплообмен зависит от массы. Объём горячей порции при 0°C составил бы

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001 ^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

При одинаковой температуре обе порции имеют одинаковую плотность, поэтому

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

Согласно закону сохранения энергии, количество теплоты, полученное холодной порцией, должно равняться количеству теплоты, отданному горячей порцией:

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

Сокращая общий множитель — удельную теплоёмкость c — и используя отношение масс, получаем

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

Вся жидкость занимала бы объём $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ при 0°C . Следовательно, её объём при конечной температуре равен

$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001 \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = \boxed{410 \text{ cm}^3}.$$

Тот же результат можно получить иначе: холодная порция расширяется до 307.5 cm^3 , а горячая сжимается до 102.5 cm^3 . В рамках линейной модели расширения изменения их объёмов взаимно компенсируются.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Преломление параллельных лучей в стеклянном полуцилиндре

Параллельные световые лучи падают на плоскую поверхность стеклянного полуцилиндра под углом 45° в плоскости, перпендикулярной оси полуцилиндра (рис. 4). (Показатель преломления равен $\sqrt{2}$.) На каком участке цилиндрической поверхности лучи выходят наружу?

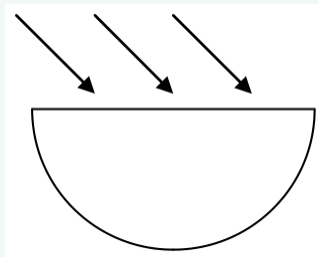


Рисунок 4

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 3.** Будем отсчитывать центральный угол ϕ по часовой стрелке от правого конца горизонтального диаметра. Лучи выходят через дугу, ограниченную углами

$$\boxed{\phi = 15^\circ \text{ и } \phi = 105^\circ.}$$

Этой дуге соответствует центральный угол 90° , а её длина равна $\pi R/2$, где R — радиус цилиндра. Предельные лучи выходят по касательной.

Решение

Задача 3. Будем пользоваться геометрической оптикой, примем показатель преломления окружающего воздуха равным 1 и пренебрежём частичными отражениями в тех случаях, когда возможно прохождение света. Однако полное внутреннее отражение необходимо учитывать.

На плоской поверхности закон Снеллиуса определяет угол преломления r , отсчитываемый от нормали:

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

Следовательно,

$$\boxed{r = 30^\circ}.$$

Таким образом, внутри стекла лучи распространяются вниз и вправо под углом 60° к горизонтали.

Пусть O — центр полукруглого сечения. В точке P криволинейной поверхности внешняя нормаль направлена вдоль радиуса OP . Обозначим через ϕ угол этого радиуса, отсчитываемый по часовой стрелке от горизонтального направления вправо. Для луча, непосредственно достигающего этой поверхности, угол падения равен

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

Предельный угол i_c при переходе из стекла в воздух удовлетворяет условию

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{i_c = 45^\circ}.$$

Следовательно, выход луча возможен при

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

или

$$\boxed{15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ}.$$

Таким образом, дуга, через которую выходят лучи, начинается на 15° ниже правого конца диаметра и заканчивается на 15° дальше самой нижней точки в направлении влево. Её угловая протяжённость и длина равны

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad \boxed{s = \frac{\pi R}{2}}.$$

На каждой из границ закон Снеллиуса даёт угол выхода 90° относительно нормали, поэтому предельные выходящие лучи касательны к окружности. При $\phi = 60^\circ$ луч падает по нормали и выходит, не меняя направления.

Необходимо также проверить лучи, которые сначала испытывают полное внутреннее отражение. Пусть a — координата точки входа луча вдоль диаметра, отсчитываемая от O , причём положительное направление — вправо. Перпендикулярное расстояние от O до луча равно

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}|a|.$$

При попадании на цилиндрическую поверхность

$$b = R \sin i.$$

Зеркальное отражение от окружности сохраняет это расстояние, а значит, и угол падения при последующих попаданиях на цилиндрическую поверхность. Любое отражение от плоской поверхности, проходящей по диаметру, также сохраняет b , поскольку этот диаметр проходит через O . Поэтому луч, первоначально испытавший полное внутреннее отражение на криволинейной поверхности, не может впоследствии выйти через другой участок этой поверхности.

Лучи, выходящие через найденную дугу, — это в точности те лучи, координаты входа которых удовлетворяют условию

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R.}$$

Остальные падающие лучи не создают дополнительных участков выхода света на криволинейной поверхности.

Решение проверено по официальному решению.