

IPhO 1968

Problemas teóricos y soluciones · Budapest, Hungría · 3 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1968/

Problema 1: Cilindro macizo y bloque unidos por una cuerda sobre un plano inclinado

Sobre un plano inclinado de 30° , un bloque de masa $m_2 = 4 \text{ kg}$ está unido mediante una cuerda ligera a un cilindro macizo de masa $m_1 = 8 \text{ kg}$ y radio $r = 5 \text{ cm}$ (Fig. 1). Halle la aceleración de los cuerpos al soltarlos. El coeficiente de rozamiento entre el bloque y el plano inclinado es $\mu = 0.2$. El rozamiento en el cojinete y la resistencia a la rodadura son despreciables.

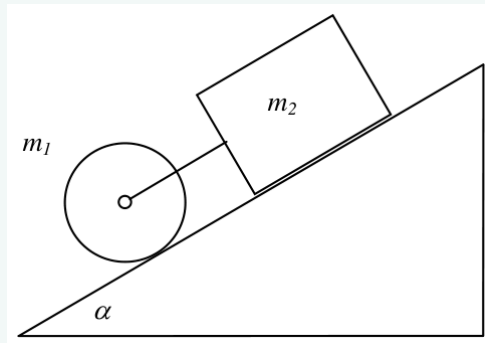


Figura 1

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 1:** Ambos cuerpos aceleran **hacia abajo por el plano inclinado** con

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

El valor numérico se obtiene usando $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

Solución

Problema 1

Considere la cuerda sin masa e inextensible y suponga que el cilindro rueda sin deslizar. Con la cuerda tensa, ambos cuerpos tienen la misma aceleración a . Tome como positivo el sentido descendente a lo largo del plano y escriba $\theta = 30^\circ$.

La cuerda actúa a través del cojinete central del cilindro, por lo que su tensión no produce ningún momento respecto al eje del cilindro. Que la resistencia a la rodadura sea despreciable significa que no hay ningún momento de resistencia a la rodadura; el rozamiento estático en el contacto sigue proporcionando el momento necesario para la rotación.

Sean T la tensión y f la fuerza de rozamiento estático sobre el cilindro, dirigida hacia arriba por el plano.

Sobre el bloque, la cuerda tira hacia abajo por el plano. Su reacción normal y su fuerza de rozamiento por deslizamiento son

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

Por tanto, la segunda ley de Newton a lo largo del plano da

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

Sobre el cilindro, tanto la tensión como el rozamiento estático actúan hacia arriba por el plano:

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

El momento de inercia de un cilindro macizo respecto a su eje es

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

Si el módulo de su aceleración angular es β , la rodadura sin deslizamiento exige $a = r\beta$. Por consiguiente, la ecuación de rotación respecto a su centro es

$$f r = I \beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

y, por tanto,

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

Al sumar (1) y (2) y sustituir después (3), se elimina la tensión:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

Así,

$$a = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

El radio se cancela porque $I/r^2 = m_1/2$.

La sustitución da

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

por lo que

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{hacia abajo por el plano.}$$

Finalmente, la hipótesis de que la cuerda permanece tensa debe exigir una tensión positiva. De (1),

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

Por tanto, la solución con aceleración común es compatible con una cuerda que puede tirar, pero no empujar.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Mezcla de dos cantidades de tolueno a diferentes temperaturas

En un vaso hay 300 cm^3 de tolueno a una temperatura de 0°C y en otro vaso hay 110 cm^3 de tolueno a una temperatura de 100°C . (La suma de los volúmenes es 410 cm^3 .) Determine el volumen final después de mezclar los dos líquidos. El coeficiente de dilatación volumétrica del tolueno es $\beta = 0.001(^{\circ}\text{C})^{-1}$. Desprecie las pérdidas de calor.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2:** El volumen final es 410 cm^3 .

Solución

Utilizamos la ley lineal habitual de dilatación térmica para una masa fija,

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

donde t se mide con respecto a 0°C . Suponemos que el calor específico del tolueno es constante y que las capacidades caloríficas de los vasos son despreciables.

Primero, determinamos la **relación de masas**, ya que el intercambio de calor depende de la masa. El volumen de la porción caliente a 0°C sería

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001 ^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

A la misma temperatura, ambas porciones tienen la misma densidad, por lo que

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

La conservación de la energía exige que el calor absorbido por la porción fría sea igual al calor cedido por la porción caliente:

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

Al cancelar el calor específico común c y utilizar la relación de masas, obtenemos

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

El líquido mezclado ocuparía $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ a 0°C . Por tanto, su volumen a la temperatura final es

$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001 ^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = 410 \text{ cm}^3.$$

De manera equivalente, la porción fría se dilata hasta alcanzar 307.5 cm^3 , mientras que la porción caliente se contrae hasta alcanzar 102.5 cm^3 . Sus cambios de volumen se compensan dentro del modelo lineal de dilatación.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Rayos paralelos refractados por un semicilindro de vidrio

Rayos de luz paralelos inciden sobre la superficie plana de un semicilindro de vidrio, con un ángulo de 45° , en un plano perpendicular al eje del semicilindro (Fig. 4). (El índice de refracción es $\sqrt{2}$.) ¿Por dónde emergen los rayos de la superficie cilíndrica?

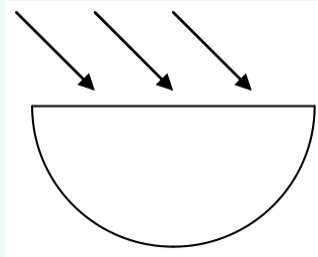


Figura 4

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 3.** Mídase el ángulo central ϕ en sentido horario desde el extremo derecho del diámetro horizontal. Los rayos emergen por el arco delimitado por

$$\phi = 15^\circ \quad \text{y} \quad \phi = 105^\circ.$$

Este arco abarca un ángulo central de 90° y tiene una longitud de $\pi R/2$, donde R es el radio del cilindro. Los rayos límite emergen tangencialmente.

Solución

Problema 3. Utilizamos la óptica geométrica, tomamos como 1 el índice de refracción del aire circundante y despreciamos las reflexiones parciales cuando la transmisión es posible. Sin embargo, debemos tener en cuenta la reflexión interna total.

En la superficie plana, la ley de Snell da el ángulo de refracción r , medido respecto de la normal:

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

Por tanto,

$$r = 30^\circ.$$

Así pues, los rayos dentro del vidrio se propagan hacia abajo y hacia la derecha, a 60° por debajo de la horizontal.

Sea O el centro de la sección semicircular. En un punto P de la superficie curva, la normal exterior sigue la dirección del radio OP . Definimos ϕ como el ángulo de este radio medido en sentido horario desde la dirección horizontal hacia la derecha. Para un rayo que llega directamente a esta superficie, su ángulo de incidencia es

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

El ángulo crítico i_c para el paso del vidrio al aire satisface

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{i_c = 45^\circ}.$$

En consecuencia, los rayos pueden emerger cuando

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

o bien

$$\boxed{15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ}.$$

Por tanto, el arco por el que emergen los rayos comienza 15° por debajo del extremo derecho del diámetro y termina 15° más allá del punto más bajo, hacia la izquierda. Su extensión angular y su longitud son

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad \boxed{s = \frac{\pi R}{2}}.$$

En ambos extremos, la ley de Snell da un ángulo de emergencia de 90° respecto de la normal, por lo que los rayos emergentes límite son tangentes a la circunferencia. En $\phi = 60^\circ$, la incidencia es normal y el rayo emerge sin cambiar de dirección.

También debemos examinar los rayos que inicialmente experimentan reflexión interna total. Sea a la coordenada de entrada de un rayo a lo largo del diámetro, medida desde O y positiva hacia la derecha. La distancia perpendicular del rayo a O es

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}|a|.$$

En un encuentro con la superficie circular,

$$b = R \sin i.$$

La reflexión especular en una circunferencia conserva esta distancia y, por tanto, el ángulo de incidencia en los encuentros posteriores con la superficie circular. Cualquier reflexión en la superficie plana del diámetro también conserva b , porque dicho diámetro pasa por O . Por tanto, un rayo que inicialmente experimenta reflexión interna total en la superficie curva no puede escapar posteriormente por otra parte de esa superficie.

Los rayos que contribuyen al arco de emergencia son precisamente aquellos cuyas coordenadas de entrada satisfacen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R}.$$

Los demás rayos incidentes no añaden ninguna otra región de emergencia en la superficie curva.

La solución se comprobó con la solución oficial.