

IPhO 1968

Theorieaufgaben und Lösungen · Budapest, Ungarn · 3 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1968/

Aufgabe 1: Durch eine Schnur verbundener Vollzylinder und Klotz auf einer schiefen Ebene

Auf einer um 30° geneigten Ebene ist ein Klotz der Masse $m_2 = 4 \text{ kg}$ durch eine leichte Schnur mit einem Vollzylinder der Masse $m_1 = 8 \text{ kg}$ und des Radius $r = 5 \text{ cm}$ verbunden (Abb. 1). Bestimmen Sie die Beschleunigung, wenn die Körper losgelassen werden. Der Reibungskoeffizient zwischen dem Klotz und der schiefen Ebene beträgt $\mu = 0.2$. Die Lagerreibung und die Rollreibung sind vernachlässigbar.

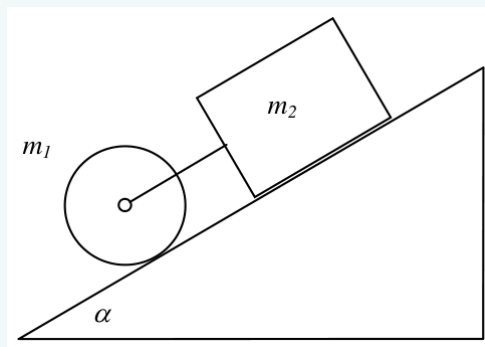


Abbildung 1

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 1:** Beide Körper beschleunigen **die schiefe Ebene hinab** mit

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

Für den Zahlenwert wird $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ verwendet.

Lösung

Aufgabe 1

Wir betrachten die Schnur als masselos und undehnbar und nehmen an, dass der Zylinder ohne Gleiten rollt. Bei gespannter Schnur haben beide Körper dieselbe Beschleunigung a . Wir wählen die Richtung die Ebene hinab als positiv und setzen $\theta = 30^\circ$.

Die Schnur greift am zentralen Lager des Zylinders an, sodass ihre Zugkraft kein Drehmoment um die Zylinderachse erzeugt. Vernachlässigbare Rollreibung bedeutet, dass kein Rollwiderstandsmoment auftritt; die Haftreibung an der Kontaktstelle liefert dennoch das für die Drehung erforderliche Drehmoment.

Es seien T die Seilzugkraft und f die auf den Zylinder wirkende Haftreibungskraft, die die Ebene hinauf gerichtet ist.

Am Klotz zieht die Schnur die Ebene hinab. Seine Normalkraft und seine Gleitreibungskraft sind

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

Das zweite Newtonsche Gesetz entlang der Ebene ergibt daher

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

Auf den Zylinder wirken sowohl die Seilzugkraft als auch die Haftreibungskraft die Ebene hinauf:

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders bezüglich seiner Achse beträgt

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

Hat seine Winkelbeschleunigung den Betrag β , so erfordert Rollen ohne Gleiten $a = r\beta$. Die Bewegungsgleichung für die Drehung um seinen Mittelpunkt lautet folglich

$$fr = I\beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

und damit

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

Durch Addition von (1) und (2) und anschließendes Einsetzen von (3) wird die Seilzugkraft eliminiert:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

Somit gilt

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

Der Radius kürzt sich heraus, weil $I/r^2 = m_1/2$.

Einsetzen ergibt

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

also

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{die Ebene hinab.}$$

Schließlich muss sich für die als gespannt angenommene Schnur eine positive Seilzugkraft ergeben. Aus (1) folgt

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

Damit ist die Lösung mit gemeinsamer Beschleunigung mit einer Schnur vereinbar, die ziehen, aber nicht drücken kann.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Mischen zweier Mengen Toluol mit unterschiedlichen Temperaturen

In einem Glas befinden sich 300 cm^3 Toluol mit einer Temperatur von 0°C , in einem anderen Glas 110 cm^3 Toluol mit einer Temperatur von 100°C . (Die Summe der Volumina beträgt 410 cm^3 .) Bestimmen Sie das Endvolumen nach dem Mischen der beiden Flüssigkeiten. Der Volumenausdehnungskoeffizient von Toluol beträgt $\beta = 0.001(^\circ\text{C})^{-1}$. Vernachlässigen Sie den Wärmeverlust.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 2:** Das Endvolumen beträgt 410 cm^3 .

Lösung

Wir verwenden das übliche lineare Gesetz der thermischen Ausdehnung für eine feste Masse,

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

wobei t relativ zu 0°C gemessen wird. Wir nehmen an, dass die spezifische Wärmekapazität von Toluol konstant ist und die Wärmekapazitäten der Gläser vernachlässigbar sind.

Zunächst bestimmen wir das **Massenverhältnis**, da der Wärmeaustausch von der Masse abhängt. Das Volumen der heißen Teilmenge bei 0°C wäre

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001 \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

Bei gleicher Temperatur haben beide Teilmengen dieselbe Dichte, daher gilt

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

Nach dem Energieerhaltungssatz muss die von der kalten Teilmenge aufgenommene Wärme gleich der von der heißen Teilmenge abgegebenen Wärme sein:

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

Durch Kürzen der gemeinsamen spezifischen Wärmekapazität c und Einsetzen des Massenverhältnisses ergibt sich

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

Die gesamte Flüssigkeit würde bei 0°C ein Volumen von $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ einnehmen. Daher beträgt ihr Volumen bei der Endtemperatur

$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001 \text{ }^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = \boxed{410 \text{ cm}^3}.$$

Gleichwertig lässt sich feststellen, dass sich die kalte Teilmenge auf 307.5 cm^3 ausdehnt, während sich die heiße Teilmenge auf 102.5 cm^3 zusammenzieht. Ihre Volumenänderungen heben sich im Rahmen des linearen Ausdehnungsmodells gegenseitig auf.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Brechung paralleler Strahlen an einem Glas-Halbzyylinder

Parallele Lichtstrahlen fallen unter einem Winkel von 45° auf die ebene Fläche eines Halbzyinders aus Glas, und zwar in einer Ebene, die senkrecht zur Achse des Halbzyinders steht (Abb. 4). (Der Brechungsindex beträgt $\sqrt{2}$.) Wo treten die Strahlen aus der Zylinderfläche aus?

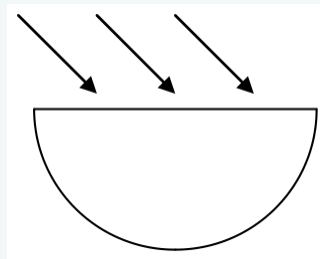


Abbildung 4

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 3.** Der Mittelpunktswinkel ϕ wird vom rechten Endpunkt des horizontalen Durchmessers aus im Uhrzeigersinn gemessen. Die Strahlen treten durch den Kreisbogen aus, der durch

$$\boxed{\phi = 15^\circ \quad \text{und} \quad \phi = 105^\circ}$$

begrenzt wird. Dieser Kreisbogen umfasst einen Winkel von 90° und hat die Länge $\pi R/2$, wobei R der Radius des Zylinders ist. Die Grenzstrahlen treten tangential aus.

Lösung

Aufgabe 3. Wir verwenden die geometrische Optik, setzen den Brechungsindex der umgebenden Luft gleich 1 und vernachlässigen Teilreflexionen, wenn Transmission möglich ist. Die Totalreflexion muss jedoch berücksichtigt werden.

An der ebenen Fläche liefert das Snelliussche Brechungsgesetz für den gegen das Lot gemessenen Brechungswinkel r :

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

Daraus folgt

$$\boxed{r = 30^\circ}.$$

Die Strahlen im Glas verlaufen daher nach rechts unten, unter einem Winkel von 60° unterhalb der Horizontalen.

Es sei O der Mittelpunkt des halbkreisförmigen Querschnitts. An einem Punkt P auf der gekrümmten Fläche ist deren nach außen gerichtete Normale durch den Radius OP gegeben. Wir definieren ϕ als den Winkel dieses Radius, der von der nach rechts gerichteten Horizontalen aus im Uhrzeigersinn gemessen wird. Für einen Strahl, der diese Fläche direkt erreicht, beträgt der Einfallswinkel

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

Der Grenzwinkel i_c der Totalreflexion beim Übergang von Glas zu Luft erfüllt

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{i_c = 45^\circ}.$$

Folglich ist ein Austritt möglich, wenn

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

also

$$\boxed{15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ}.$$

Der Kreisbogen, durch den die Strahlen austreten, beginnt somit 15° unterhalb des rechten Endpunkts des Durchmessers und endet 15° jenseits des tiefsten Punkts in Richtung nach links. Seine Winkelausdehnung und seine Länge betragen

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad \boxed{s = \frac{\pi R}{2}}.$$

An beiden Grenzen liefert das Snelliussche Brechungsgesetz einen Austrittswinkel von 90° gegen das Lot, sodass die austretenden Grenzstrahlen tangential zum Kreis verlaufen. Bei $\phi = 60^\circ$ fällt der Strahl senkrecht ein und tritt ohne Richtungsänderung aus.

Wir müssen auch die Strahlen untersuchen, die zunächst totalreflektiert werden. Es sei a die Eintrittskoordinate eines Strahls entlang des Durchmessers, gemessen von O aus und positiv nach rechts. Sein senkrechter Abstand von O beträgt

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} |a|.$$

Beim Auftreffen auf die kreisförmige Oberfläche gilt

$$b = R \sin i.$$

Spiegelnde Reflexion an einem Kreis erhält diesen Abstand und damit den Einfallswinkel bei späterem Auftreffen auf die kreisförmige Oberfläche. Auch jede Reflexion am ebenen Durchmesser erhält b , da dieser Durchmesser durch O verläuft. Daher kann ein Strahl, der zunächst an der gekrümmten Fläche totalreflektiert wird, später nicht durch einen anderen Teil dieser Fläche austreten.

Zum Austrittsbogen tragen genau diejenigen Strahlen bei, deren Eintrittskordinaten die Bedingung

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R}$$

erfüllen. Die übrigen einfallenden Strahlen tragen keinen weiteren Austrittsbereich auf der gekrümmten Fläche bei.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.