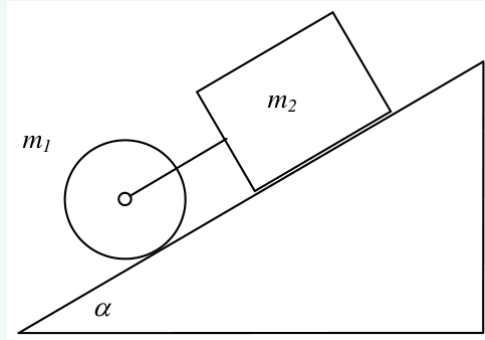


المسألة 1: أسطوانة مصمتة وكتلة موصولتان بحبل على مستوى مائل

على مستوى مائل بزاوية 30° ، توجد كتلة مقدارها $m_2 = 4$ كغ، موصولة بحبل خفيف بأسطوانة مصمتة كتلتها $m_1 = 8$ كغ ونصف قطرها $r = 5$ سم (الشكل 1). أوجد تسارع الجسمين إذا أُطلقا من السكون. معامل الاحتكاك بين الكتلة والمستوى المائل هو $\mu = 0.2$. يُهمل الاحتكاك في المحمل واحتكاك التدرج.



الشكل 1

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 1: يتسارع الجسمان إلى أسفل المستوى المائل بتسارع

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin 30^\circ - \mu m_2 g \cos 30^\circ}{\frac{3}{2}m_1 + m_2} = 0.3317g \approx 3.25 \text{ m s}^{-2}.$$

تُحسب القيمة العددية باستخدام $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$.

الحل

المسألة 1

اعتبر الحبل عديم الكتلة وغير قابل للاستطالة، وافترض أن الأسطوانة تتدحرج دون انزلاق. ما دام الحبل مشدوداً، فإن للجسمين التسارع نفسه a . اعتبر الاتجاه إلى أسفل المستوى موجباً، واكتب $\theta = 30^\circ$.

يؤثر الحبل عبر المحمل المركزي للأسطوانة، ولذلك لا يُولد شدة عزمًا حول محور الأسطوانة. وإهمال احتكاك التدرج يعني عدم وجود عزم مقاوم للتدرج؛ أما الاحتكاك السكوني عند التلامس فيظل مصدر العزم اللازم للدوران.

ليكن T قوة الشد و f قوة الاحتكاك السكوني المؤثرة في الأسطوانة، واتجاهها إلى أعلى المستوى.

بالنسبة إلى الكتلة، يسحبها الحبل إلى أسفل المستوى. وتكون قوة رد الفعل العمودية عليها وقوة الاحتكاك الانزلاقي

$$N_2 = m_2 g \cos \theta, \quad F_2 = \mu m_2 g \cos \theta.$$

ومن ثم يعطي قانون نيوتن الثاني على امتداد المستوى

$$m_2 a = m_2 g \sin \theta + T - \mu m_2 g \cos \theta. \quad (1)$$

بالنسبة إلى الأسطوانة، تؤثر كل من قوة الشد وقوة الاحتكاك السكوني إلى أعلى المستوى:

$$m_1 a = m_1 g \sin \theta - T - f. \quad (2)$$

عزم القصور الذاتي للأسطوانة مصممة حول محورها هو

$$I = \frac{1}{2} m_1 r^2.$$

إذا كان مقدار تسارعها الزاوي β ، فإن التدحرج دون انزلاق يقتضي أن يكون $a = r\beta$. وبالتالي تكون معادلة الحركة الدورانية حول مركزها

$$fr = I\beta = \frac{1}{2} m_1 r^2 \frac{a}{r},$$

ومن ثم

$$f = \frac{1}{2} m_1 a. \quad (3)$$

بجمع (1) و(2)، ثم التعويض من (3)، تُحذف قوة الشد:

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta - \frac{1}{2} m_1 a.$$

إذن

$$a = \frac{(m_1 + m_2)g \sin \theta - \mu m_2 g \cos \theta}{\frac{3}{2} m_1 + m_2}.$$

يُختزل نصف القطر لأن $I/r^2 = m_1/2$.

بالتعويض نحصل على

$$a = g \frac{(8 + 4)(1/2) - (0.2)(4)(\sqrt{3}/2)}{(3/2)(8) + 4} = g \frac{5.30718}{16} = 0.331699g,$$

وعليه

$$a \approx 3.25 \text{ m s}^{-2} \quad \text{إلى أسفل المستوى}$$

أخيرًا، يجب أن يستلزم افتراض بقاء الحبل مشدودًا قوة شد موجبة. من (1)،

$$T = m_2 a - m_2 g \sin \theta + \mu m_2 g \cos \theta \approx 0.192 \text{ N} > 0.$$

إذن، يتسق الحل الذي يعطي تسارعًا مشتركًا للجسمين مع كون الحبل قادرًا على السحب ولكنه غير قادر على الدفع.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مزج كميتين من التولوين عند درجتَي حرارة مختلفتين

توجد في كأس كمية من التولوين حجمها 300 cm^3 ودرجة حرارتها 0°C ، وفي كأس أخرى كمية من التولوين حجمها 110 cm^3 ودرجة حرارتها 100°C . (مجموع الحجمين هو 410 cm^3). أوجد الحجم النهائي بعد مزج السائلين. معامل التمدد الحجمي للتولوين هو $\beta = 0.001(^\circ\text{C})^{-1}$. أهمل فقدان الحرارة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 2: الحجم النهائي هو 410 cm^3 .

الحل

نستخدم قانون التمدد الحراري الخطي المعتاد لكتلة ثابتة،

$$V(t) = V(0)(1 + \beta t),$$

حيث نقيس t بالنسبة إلى 0°C . نفترض أن السعة الحرارية النوعية للتولين ثابتة، وأن السعات الحرارية للكأسين مهملة.

أولاً، نحدد نسبة الكتلتين، لأن التبادل الحراري يعتمد على الكتلة. سيكون حجم الكمية الساخنة عند 0°C مساوياً لـ

$$V_h(0) = \frac{110 \text{ cm}^3}{1 + (0.001^\circ\text{C}^{-1})(100^\circ\text{C})} = 100 \text{ cm}^3.$$

عند درجة الحرارة نفسها، تكون كثافة الكميّتين متساوية، ومن ثم

$$\frac{m_c}{m_h} = \frac{300}{100} = 3.$$

يقتضي حفظ الطاقة أن تساوي الحرارة التي تكتسبها الكمية الباردة الحرارة التي تفقدها الكمية الساخنة:

$$m_c c (t_f - 0^\circ\text{C}) = m_h c (100^\circ\text{C} - t_f).$$

باختزال السعة الحرارية النوعية المشتركة c واستخدام نسبة الكتلتين، نحصل على

$$3t_f = 100^\circ\text{C} - t_f, \quad t_f = 25^\circ\text{C}.$$

سيشغل السائل الناتج عن المزج حجماً مقداره $300 + 100 = 400 \text{ cm}^3$ عند 0°C . لذلك يكون حجمه عند درجة الحرارة النهائية

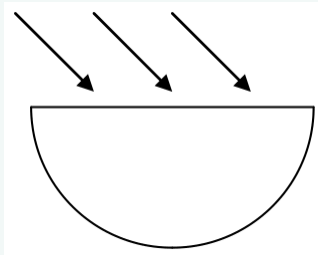
$$V_f = (400 \text{ cm}^3) [1 + (0.001^\circ\text{C}^{-1})(25^\circ\text{C})] = 410 \text{ cm}^3.$$

وبصورة مكافئة، تتمدد الكمية الباردة ليصبح حجمها 307.5 cm^3 ، بينما تنكمش الكمية الساخنة ليصبح حجمها 102.5 cm^3 . يلغي التغيران في حجميهما أحدهما الآخر ضمن نموذج التمدد الخطي.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: أشعة متوازية تنكسر عبر نصف أسطوانة زجاجية

تسقط أشعة ضوئية متوازية على السطح المستوي لنصف أسطوانة مصنوعة من الزجاج، بزاوية مقدارها 45° ، في مستوى عمودي على محور نصف الأسطوانة (الشكل 4). (معامل الانكسار هو $\sqrt{2}$). من أين تخرج الأشعة عبر السطح الأسطواني؟



الشكل 4

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- **المسألة 3.** تُقاس الزاوية المركزية ϕ في اتجاه عقارب الساعة بدءًا من الطرف الأيمن للقطر الأفقي. تخرج الأشعة عبر القوس المحدود بـ

$$\phi = 15^\circ \text{ و } \phi = 105^\circ.$$

يقابل هذا القوس زاوية مركزية مقدارها 90° ، ويبلغ طوله $\pi R/2$ ، حيث R هو نصف قطر الأسطوانة. وتخرج الأشعة الحدية مماسيًا.

الحل

المسألة 3. نستخدم البصريات الهندسية، ونأخذ معامل انكسار الهواء المحيط مساويًا لـ 1، ونهمل الانعكاسات الجزئية عندما يكون النفاذ ممكنًا. لكن يجب أخذ الانعكاس الكلي الداخلي في الحسبان.

عند السطح المستوي، يعطي قانون سنيل زاوية الانكسار r ، المقيسة من العمود على السطح:

$$\sin 45^\circ = \sqrt{2} \sin r.$$

ومن ثم

$$r = 30^\circ.$$

لذلك تسير الأشعة داخل الزجاج إلى أسفل وإلى اليمين، بزاوية مقدارها 60° تحت الاتجاه الأفقي.

ليكن O مركز المقطع نصف الدائري. عند نقطة P على السطح المنحني، يكون العمود على السطح والمتجه إلى الخارج هو نصف القطر OP . نعرّف ϕ بأنها زاوية نصف القطر هذا، مقيسة في اتجاه عقارب الساعة من الاتجاه الأفقي نحو اليمين. بالنسبة إلى شعاع يصل إلى هذا السطح مباشرةً، تكون زاوية سقوطه

$$i = |60^\circ - \phi|.$$

تحقق الزاوية الحرجة i_c للانتقال من الزجاج إلى الهواء العلاقة

$$\sin i_c = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad i_c = 45^\circ.$$

وبالتالي، يكون الخروج ممكنًا عندما

$$|60^\circ - \phi| \leq 45^\circ,$$

أي

$$15^\circ \leq \phi \leq 105^\circ.$$

إذن يبدأ القوس الذي تخرج منه الأشعة عند زاوية مقدارها 15° أسفل الطرف الأيمن للقطر، وينتهي بعد أدنى نقطة بزاوية مقدارها 15° نحو اليسار. وامتداده الزاوي وطوله هما

$$\Delta\phi = 90^\circ = \frac{\pi}{2}, \quad s = \frac{\pi R}{2}.$$

عند كلٍّ من الحدين، يعطي قانون سنيل زاوية خروج مقدارها 90° بالنسبة إلى العمود على السطح، لذا تكون الأشعة الخارجة الحدية مماسةً للدائرة. وعند $\phi = 60^\circ$ ، يكون السقوط عموديًا ويخرج الشعاع دون أن يتغير اتجاهه.

يجب أيضًا فحص الأشعة التي تتعرض في البداية لانعكاس كلي داخلي. ليكن a إحداثي نقطة دخول شعاع على طول القطر، مقيسًا من O ، وموجبًا نحو اليمين. وتكون المسافة العمودية بين الشعاع و O هي

$$b = |a| \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} |a|.$$

عند اصطدام الشعاع بالسطح الدائري،

$$b = R \sin i.$$

يحافظ الانعكاس المرآوي عند دائرة على هذه المسافة، ومن ثم على زاوية السقوط عند الاصطدامات اللاحقة بالسطح الدائري. وأي انعكاس عند السطح المستوي الذي يمثله القطر يحافظ أيضاً على b ، لأن هذا القطر يمر بالنقطة O . لذلك فإن الشعاع الذي ينعكس في البداية انعكاساً كلياً عند السطح المنحني لا يمكنه لاحقاً الخروج عبر جزء آخر من ذلك السطح.

الأشعة التي تسهم في القوس الذي تخرج منه الأشعة هي تحديداً تلك التي تدخل ضمن المجال

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|a| \leq \frac{R}{\sqrt{2}}, \quad \boxed{|a| \leq R\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816R}.$$

ولا تضيف الأشعة الساقطة المتبقية أي منطقة أخرى لخروج الأشعة على السطح المنحني.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.