

IPhO 1967

理论题与解答 · 波兰华沙 · 4 道理论题及完整解答

eulersolve.org/iphO/1967/

题目 1: 子弹穿过静置在柱顶的小球

一个质量为 $M = 0.2 \text{ kg}$ 的小球静置在一根高度为 $h = 5 \text{ m}$ 的竖直柱子的顶端。一颗质量为 $m = 0.01 \text{ kg}$ 、以速度 $v_0 = 500 \text{ m/s}$ 运动的子弹水平穿过小球的球心（图 1）。小球落在距柱脚 $s = 20 \text{ m}$ 处。子弹在何处落地？子弹穿过小球时，其动能的多大比例转化为热量？忽略空气阻力。设 $g = 10 \text{ m/s}^2$ 。

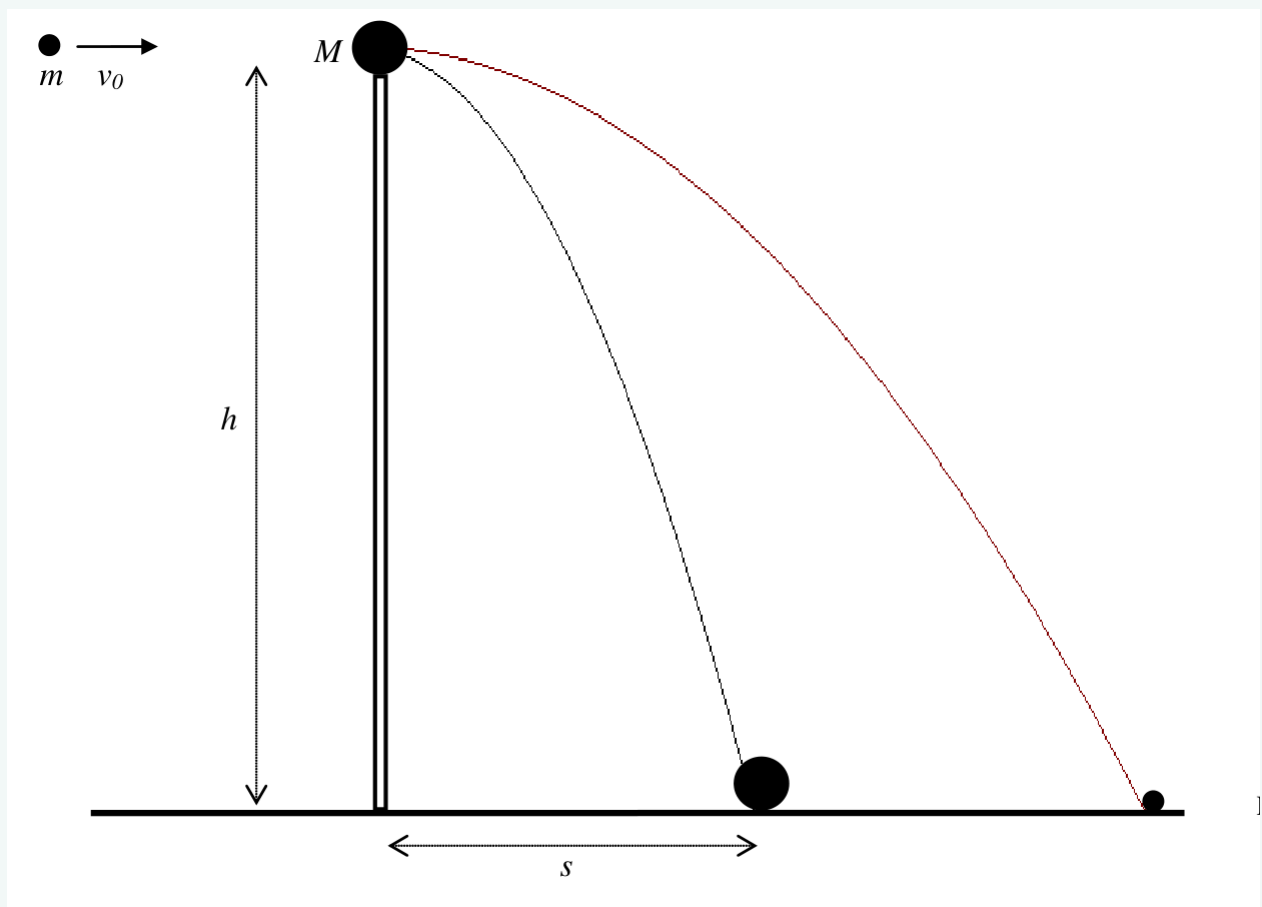


图 1

题目译自官方英文原文。

答案

- 子弹的落点：沿子弹原来的运动方向，距柱脚的水平距离为 100 m，比小球的落点远 80 m。

- 转化为热量的能量: $Q = 1160 \text{ J}$, 占子弹初始动能的 92.8% 。

解答

子弹的落点

将小球和子弹视为质点, 并认为子弹穿过小球所用的时间与随后下落的时间相比可以忽略。水平的对心碰撞使小球产生水平平动, 而不发生转动。在短暂的碰撞过程中, 外力的水平冲量可以忽略, 因此水平方向的动量守恒。

子弹穿出后, 两个物体都从高度 h 处以零竖直初速度开始下落。因此, 它们的下落时间相同, 为

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1 \text{ s}.$$

由于没有空气阻力, 小球的水平速度 V 保持不变。由测得的水平射程可得

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20 \text{ m s}^{-1}.$$

设子弹穿过小球后的水平速度为 v 。由水平方向的动量守恒可得

$$mv_0 = mv + MV,$$

因此

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100 \text{ m s}^{-1}.$$

所以, 子弹相对于柱脚的水平射程为

$$x = vt = (100)(1) = 100 \text{ m}.$$

转化为热量的能量

子弹穿过小球的过程中, 动能不守恒。在本题的理想化模型中, 总动能的减少量转化为热量。在短暂的穿透过程中, 重力势能的变化可以忽略。

最初, 只有子弹具有动能:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250 \text{ J}.$$

子弹刚穿出小球时, 总动能为

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J}.$$

因此,

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J}.$$

所求的转化为热量的能量占子弹初始动能的比例为

$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

传递给小球、使其运动的 40 J 能量必须从热量中排除。

解答已与官方解答核对。

题目 2：无限电阻网络的电阻

考虑图 3 所示的由电阻器组成的无限网络（每个电阻器的电阻均为 r ）。求 A、B 两点之间的等效电阻 R_{AB} 。

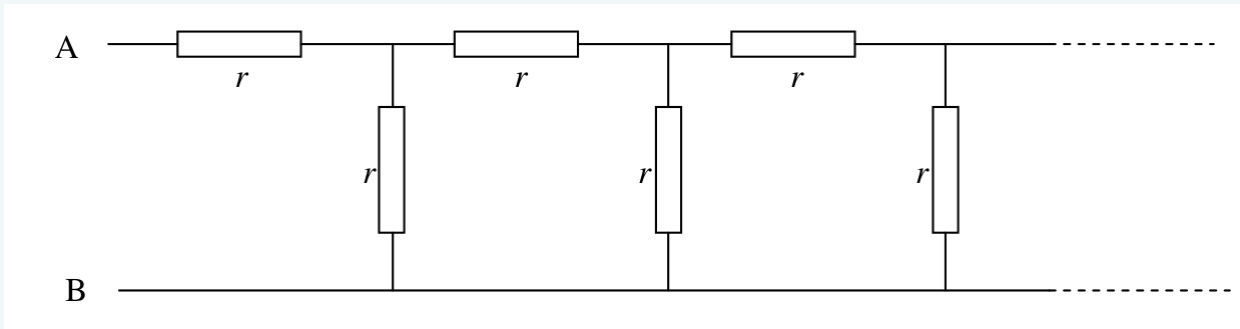


图 3

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 2: $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r$ 。

解答

将连接导线的电阻视为可忽略不计，并将每个电阻器视为电阻为 $r > 0$ 的理想欧姆电阻器。

令 $R = R_{AB}$ 。从 A 点流入的电流必须先通过第一个水平放置的电阻器，其电阻为 r 。在随后的节点处，有两条通向与 B 点相连的下方导线的路径：

- 第一个竖直放置的电阻器，其电阻为 r 。
- 剩余的整个梯形网络，其结构与原网络完全相同，因此电阻为 R 。

这两条路径并联，其等效电阻与第一个水平放置的电阻器串联。因此，由电阻的串联和并联规律可得

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r + R}.$$

两边乘以 $r + R$ 并整理，得

$$\begin{aligned} R(r + R) &= r(r + R) + rR, \\ R^2 - rR - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

因此

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

对于由正电阻组成的网络，负根不合物理要求，因此得到

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

为说明采用无限梯形网络的合理性，令 R_n 表示在第 n 个竖直电阻器之后终止的有限梯形网络的电阻。则

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r + R_n}.$$

这里 $R_2 = 5r/3 < R_1$ 。由于右端是 R_n 的单调递增函数，由数学归纳法可知，对每个 n 都有 $R_{n+1} < R_n$ 。此外， $R_n > r$ ，因为第一个水平放置的电阻器与一个正电阻串联。因此， R_n 收敛，且其极限满足上面求解的方程。

解答已与官方解答核对。

题目 3：向悬挂的小球和平面上静置的小球供给相同的热量

考虑两个完全相同的均质小球 A 和 B，它们的初始温度相同。其中一个静置在水平面上，另一个用细线悬挂（图 6）。向两个小球供给相同的热量。两个小球的最终温度是否相同？请说明理由。（各种热损失均可忽略不计。）



图 6

题目译自官方英文原文。

答案

- **题目 3：** 在通常的初等模型中，假设小球受热膨胀，悬挂的小球 A 的最终温度高于静置的小球 B：

$$T_A > T_B.$$

解答

假设平面是刚性的，细线长度固定，且两个小球受热时均匀膨胀。我们采用初等近似，认为它们的热能变化量与温度具有相同的关系，并忽略支承应力的影响。

设每个小球的初始半径为 R_0 ，初始温度为 T_0 。用 m 表示它们共同的质量，用 Q 表示向每个小球供给的热量。

当半径增加 ΔR 时：

- 对于 **A**，顶部的悬挂点保持固定，因此其质心下降 ΔR 。
- 对于 **B**，其最低点始终位于平面上，因此其质心上升 ΔR 。

因此，它们的重力势能变化量为

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

静止的支承不做功。由能量守恒可得

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

其中，两者共同涉及的克服大气压所做的功，可以忽略，也可以计入热能项。因此

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

对于正热膨胀，两个小球的半径变化量均为正。因此，

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

根据所假设的两个小球热能随温度升高而增加的关系，这意味着

$$T_A > T_B.$$

具体而言，设 c 为两者共同的比热容， $\alpha > 0$ 为线膨胀系数，在一个较小的温度区间内将它们视为常量。记 $\Delta T_i = T_i - T_0$ ，则

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

能量平衡方程变为

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

从而

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

在通常条件下， $g\alpha R_0 \ll c$ ，因此得到上述温度大小关系。

从物理上看，A 在膨胀时释放重力势能，而 B 将所获得能量的一部分用于抬高其质心。根据所给信息，无法计算出温差的数值。

解答已与官方解答核对。

题目 4：含有空气和蒸发后的水蒸气的密闭容器内的压强

说明：组委会准备了三道理论题。遗憾的是，第一届奥林匹克竞赛举办时，罗马尼亚最高年级的学生正在参加大学入学考试。因此，罗马尼亚派出了一支由较低年级学生组成的队伍。他们尚不熟悉电学。为了给他们一个机会，组织者（经国际委员会同意）增设了这里给出的第四题。所有学生（不仅是罗马尼亚学生）都可以选择三道题作答。各题的最高得分为：第一题——10 分，第二题——10 分，第三题——10 分，第四题——6 分。共有 8 名学生解答了第四题，其中只有四人得到了 6 分。

一个容积为 $V_0 = 10 \text{ l}$ 的密闭容器内装有标准状况 ($t_0 = 0^\circ\text{C}$ 、 $p_0 = 1 \text{ atm}$) 下的干燥空气。在某一时刻，向容器内加入 3 g 水，并将系统加热至 $t = 100^\circ\text{C}$ 。求容器内的压强。讨论你在解题时所作假设。

题目译自官方英文原文。

答案

- 题目 4 (6 分) : 最终的绝对压强为

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

全部 3 g 水均蒸发, 所形成的水蒸气未达到饱和。这一结果假设容器为刚性容器, 加水时没有空气逸出, 气体具有理想气体的性质, 并且系统在 100°C 时达到热平衡和相平衡。

解答

题目 4

使用绝对温度:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

对于理想混合气体, 根据道尔顿分压定律, 总压强等于空气分压与水蒸气分压之和:

$$p = p_a + p_v.$$

空气的物质的量保持不变。分别对初态和末态应用理想气体状态方程, 得

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

因此

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm}.$$

我们必须判断加入的水是否全部蒸发。如果全部蒸发, 则水蒸气的物质的量为

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol}.$$

其对应的分压将为

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm}.$$

在 100°C 时, 水的饱和蒸气压约为

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm}.$$

由于

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

即使水全部蒸发, 形成的水蒸气仍未达到饱和。因此, 任何残留的液态水都会继续蒸发。所以, **水全部蒸发**。

等价地, 使容器内的水蒸气恰好达到饱和所需的水的质量为

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g},$$

这超过了现有的 3 g。是否达到饱和取决于水蒸气的分压。

因此, 最终的总压强为

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

得出这一结果所依据的假设如下：

- **容器容积不变：** 容器的热膨胀和压强引起的形变可以忽略。
- **空气量守恒：** 加水时没有空气逸出，且容器始终保持密封。
- **理想气体性质：** 空气和水蒸气遵循理想气体状态方程及道尔顿分压定律。在题给的温度和压强下，这些都是合理的近似。
- **平衡：** 提供足够的热量和时间，使容器内所有物质都达到 100°C ，并使蒸发过程完成。汽化潜热会影响所需输入的热量，但不会影响指定温度下的最终压强。

解答已与官方解答核对。