

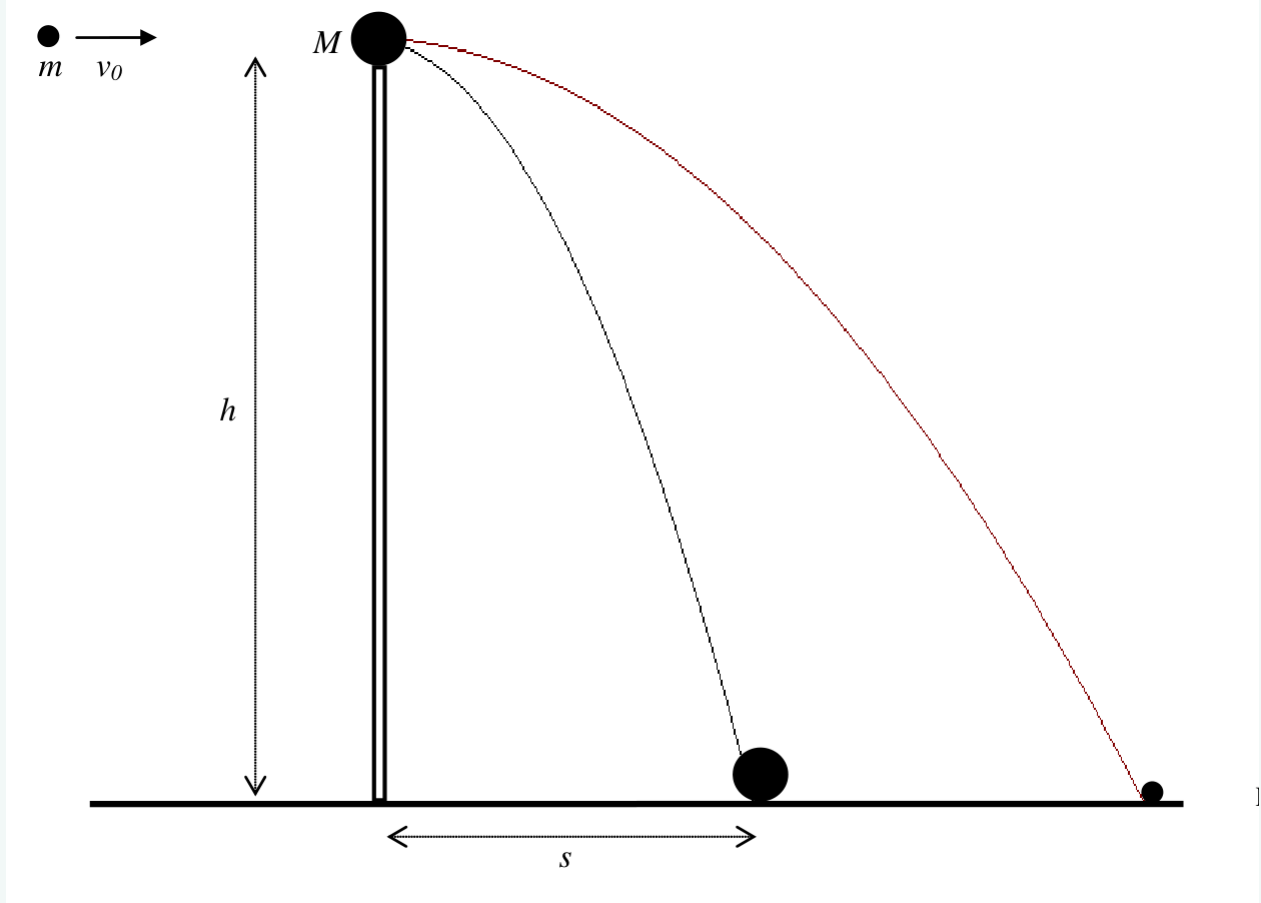
IPhO 1967

Teorik sorular ve çözümler · Varşova, Polonya · 4 teori sorusu, tam çözümleriyle

eulersolve.org/ipho/1967/

Soru 1: Bir sütun üzerinde duran kürenin içinden geçen mermi

Kütlesi $M = 0.2$ kg olan küçük bir küre, yüksekliği $h = 5$ m olan düşey bir sütun üzerinde durmaktadır. Kütlesi $m = 0.01$ kg olan ve $v_0 = 500$ m/s hızıyla hareket eden bir mermi, kürenin merkezinden yatay doğrultuda geçer (Şek. 1). Küre, $s = 20$ m uzaklıkta yere düşer. Mermi nerede yere düşer? Mermi kürenin içinden geçerken merminin kinetik enerjisinin ne kadarı ısıya dönüşmüştür? Hava direncini ihmal ediniz. $g = 10$ m/s² olduğunu kabul ediniz.



Şek. 1

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Merminin yere düştüğü nokta:** Sütunun tabanından yatay doğrultuda, merminin ilk hareket yönünde 100 m uzaklıkta; kürenin düştüğü noktadan 80 m ileride.

- **Isıya dönüşen enerji:** $Q = 1160 \text{ J}$; merminin başlangıçtaki kinetik enerjisinin 92.8% 'ine karşılık gelir.

Çözüm

Merminin yere düştüğü nokta

Küreyi ve mermiyi noktasal parçacıklar olarak ele alalım ve merminin kürenin içinden geçiş süresini, ardından gelen düşme süresine kıyasla ihmal edilebilir kabul edelim. Merkezden geçen yatay çarpışma, dönme olmaksızın yatay öteleme hareketi oluşturur. Kısa süren çarpışma sırasında dış kuvvetlerin yatay doğrultudaki itmesi ihmal edilebilir olduğundan yatay momentum korunur.

Mermi kürenin içinden geçtikten sonra her iki cisim de h yüksekliğinden, düşey hızları sıfır olacak şekilde düşmeye başlar. Dolayısıyla ortak düşme süreleri

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1 \text{ s.}$$

Hava direnci olmadığından kürenin yatay hızı V sabit kalır. Ölçülen menzilden

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20 \text{ m s}^{-1}.$$

Merminin kürenin içinden geçtikten sonraki yatay hızı v olsun. Yatay momentumun korunumundan

$$mv_0 = mv + MV,$$

dolayısıyla

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100 \text{ m s}^{-1}.$$

Böylece merminin sütundan itibaren yatay menzili

$$x = vt = (100)(1) = 100 \text{ m}.$$

Isıya dönüşen enerji

Mermi kürenin içinden geçerken kinetik enerji korunmaz. Sorunun idealleştirilmiş modelinde toplam kinetik enerjideki azalma ısıya dönüşür. Kısa süren geçiş sırasında kütleçekim potansiyel enerjisindeki değişim ihmal edilebilir.

Başlangıçta yalnızca merminin kinetik enerjisi vardır:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250 \text{ J.}$$

Mermi kürenin içinden geçtikten hemen sonra toplam kinetik enerji

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J.}$$

Dolayısıyla,

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J}.$$

Isıya dönüşen enerjinin merminin başlangıçtaki kinetik enerjisine oranı

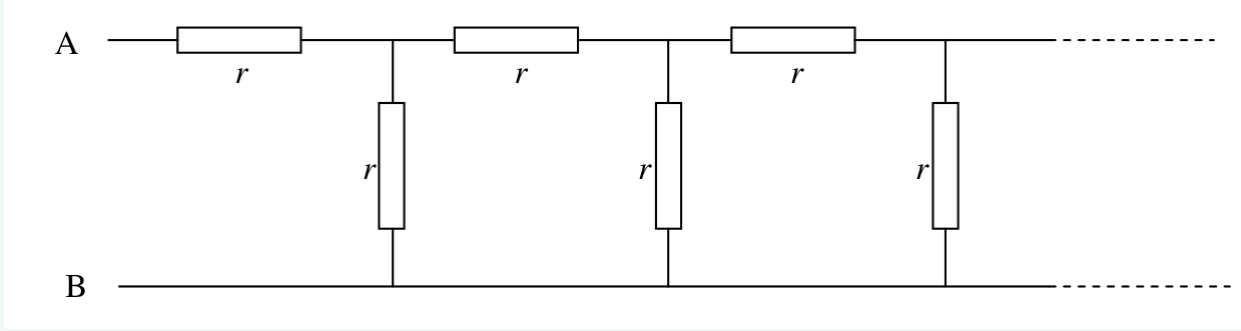
$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

Kürenin hareketine aktarılan 40 J, ısıya dönüşen enerjiye dahil edilmemelidir.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 2: Sonsuz bir direnç ağının direnci

Şekil 3'te gösterilen, her birinin direnci r olan dirençlerden oluşan sonsuz bir ağı ele alın. A ve B noktaları arasındaki eşdeğer direnç R_{AB} 'yi bulun.



Şekil 3

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

• Soru 2: $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$

Çözüm

Bağlantı tellerinin dirençlerini ihmal edilebilir kabul edin ve her bir direnci, $r > 0$ olmak üzere, Ohm yasasına uyan ideal bir direnç olarak ele alın.

$R = R_{AB}$ olsun. A noktasından giren akım önce direnci r olan ilk yatay dirençten geçmek zorundadır. Bundan sonraki düğüm noktasında, B'ye bağlı alt tele ulaşan iki yol vardır:

- Direnci r olan ilk dikey direnç.
- Merdiven ağının geriye kalan tüm kısmı; bu kısım başlangıçtaki ağla tam olarak aynı yapıya sahip olduğundan direnci R 'dir.

Bu iki yol paralel bağlıdır ve eşdeğer dirençleri ilk yatay dirençle seri bağlıdır. Dolayısıyla seri ve paralel bağlı dirençlerin eşdeğer direnç bağıntıları

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r + R}$$

sonucunu verir. $r + R$ ile çarpıp yeniden düzenlersek,

$$R(r + R) = r(r + R) + rR,$$
$$R^2 - rR - r^2 = 0.$$

Böylece

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

Pozitif dirençlerden oluşan bir ağ için negatif kök kabul edilemez; dolayısıyla

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

Sonsuz bir merdiven ağı ele almanın geçerliliğini gerekçelendirmek için, R_n , n . düşey direncinden sonra sona eren sonlu bir merdiven ağının direncini gösterebilir. Bu durumda

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r + R_n}.$$

Burada $R_2 = 5r/3 < R_1$ 'dir. Sağ taraf R_n 'nin artan bir fonksiyonu olduğundan, tümevarım her n için $R_{n+1} < R_n$ olduğunu gösterir. Ayrıca ilk yatay direnç pozitif bir dirençle seri bağlı olduğundan $R_n > r$ 'dir. Dolayısıyla R_n yakınsar ve limiti yukarıda çözülen denklemi sağlar.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 3: Asılı bir küreye ve bir düzlem üzerinde duran bir küreye eşit miktarda ısı verilmesi

Başlangıç sıcaklıkları aynı olan, özdeş ve homojen iki küreyi, A ve B'yi ele alalım. Bunlardan biri yatay bir düzlem üzerinde dururken diğeri bir ipten asılıdır (Şekil 6). Her iki küreye de eşit miktarda ısı verilmiştir. Kürelerin son sıcaklıkları aynı mıdır, yoksa farklı mıdır? Yanıtınızı gerekçelendirin. (Her türlü ısı kaybı ihmal edilebilir.)



Şekil 6

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 3:** Alışılmış temel modelde, ısı genleşmenin pozitif olduğu varsayımıyla, **asılı küre A, düzlem üzerinde duran küre B'den daha sıcak olur:**

$$T_A > T_B.$$

Çözüm

Düzlemin rijit olduğunu, ipin uzunluğunun sabit olduğunu ve her iki kürenin de ısıtıldığında düzgün biçimde genleştiğini varsayalım. Desteklerin oluşturduğu gerilmelerin etkisini ihmal ederek, kürelerin ısı enerji değişimlerinin sıcaklığa aynı biçimde bağlı olduğu temel yaklaşımı kullanıyoruz.

Her bir kürenin başlangıç yarıçapı R_0 , sıcaklığı ise T_0 olsun. Ortak kütlelerini m , her birine verilen ısıyı ise Q ile gösterelim.

Yarıçap ΔR kadar arttığında:

- **A** için, üstteki bağlanma noktası sabit kalır; dolayısıyla kütle merkezi ΔR kadar **alçalır**.
- **B** için, en alt noktası düzlem üzerinde kalır; dolayısıyla kütle merkezi ΔR kadar **yükselir**.

Bu nedenle kütleçekimsel potansiyel enerjilerindeki değişimler

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

şeklindedir.

Hareketsiz destekler iş yapmaz. Enerjinin korunumu

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

bağıntısını verir; burada atmosfer basıncına karşı yapılan ve her iki küre için ortak olan iş ya ihmal edilebilir ya da ısı enerji terimine dahil edilebilir. Böylece

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

elde edilir.

Pozitif ısı genleşme durumunda her iki yarıçap değişimi de pozitiftir. Dolayısıyla,

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

Isı enerji ile sıcaklık arasında her iki küre için aynı ve artan bir ilişki olduğu varsayımı altında bu sonuç

$$T_A > T_B.$$

eşitsizliğini gerektirir.

Açık bir ifade elde etmek için, c ortak özgül ısı kapasitesi, $\alpha > 0$ ise doğrusal genleşme katsayısı olsun ve bunlar küçük bir sıcaklık aralığında sabit kabul edilsin. $\Delta T_i = T_i - T_0$ yazarsak,

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

Enerji dengeleri

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

halini alır ve buradan

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

elde edilir. Olağan koşullarda $g\alpha R_0 \ll c$ olduğundan, belirtilen sıralama bulunur.

Fiziksel olarak A genişlerken kütleçekimsel potansiyel enerji açığa çıkarır; B ise verilen enerjinin bir kısmını kütle merkezini yükseltmek için kullanır. Verilen bilgilerden sayısal bir sıcaklık farkı hesaplanamaz.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.

Soru 4: Hava ve buharlaşmış su içeren kapalı bir kaptaki basınç

Açıklama: Düzenleme Komitesi üç teorik soru hazırlamıştı. Ne yazık ki 1. Olimpiyat sırasında Romanya'daki son sınıf öğrencilerinin üniversite giriş sınavları vardı. Bu nedenle Romanya, daha alt sınıflardaki öğrencilerden oluşan bir takım gönderdi. Bu öğrenciler elektrik konusunu bilmiyorlardı. Onlara da bir şans tanımak için organizatörler (Uluslararası Kurulun onayıyla) burada sunulan dördüncü soruyu eklediler. Öğrencilerin (yalnızca Romanya'dan gelenlerin değil) üç soru seçmelerine izin verildi. Sorulardan alınabilecek en yüksek puanlar şöyleydi: 1. soru – 10 puan, 2. soru – 10 puan, 3. soru – 10 puan ve 4. soru – 6 puan. Dördüncü soruyu 8 öğrenci çözdü. Bunlardan yalnızca dördü sorudan 6 puan aldı.

Hacmi $V_0 = 10$ l olan kapalı bir kap, normal koşullarda ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1$ atm) kuru hava içermektedir. Bir anda kaba 3 g su eklenir ve sistem $t = 100^\circ\text{C}$ sıcaklığına kadar ısıtılır. Kaptaki basıncı bulunuz. Problemi çözmek için yaptığınız varsayımı tartışınız.

Soru metni resmi İngilizce metinden çevrilmiştir.

Cevaplar

- **Soru 4 (6 puan):** Son mutlak basınç

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Suyun 3 g'ının tamamı buharlaşır; oluşan buhar doymamıştır. Bu sonuç, kabın rijit olduğu, su eklenirken hava kaybı olmadığı, gazların ideal gaz davranışı gösterdiği ve 100°C 'de ısı dengesi ve faz dengesinin sağlandığı varsayımlarına dayanır.

Çözüm

Soru 4

Mutlak sıcaklıkları kullanalım:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

İdeal bir karışım için Dalton yasası, toplam basıncı hava ve su buharının kısmi basınçlarının toplamı olarak verir:

$$p = p_a + p_v.$$

Havanın madde miktarı sabittir. Başlangıç ve son durum için ideal gaz yasasını uygulayalım:

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

Böylece

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm}.$$

Eklenen suyun tamamının buharlaşıp buharlaşmadığını belirlememiz gerekir. Tamamı buharlaşırsa madde miktarı

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol}.$$

Buna karşılık gelen kısmi basınç ise şöyle olur:

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm}.$$

100°C'de suyun doymuş buhar basıncı yaklaşık olarak

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm}.$$

Şu eşitsizlik sağlandığından,

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

suyun tamamının buharlaşması bile doymamış buhar oluşturur. Dolayısıyla geride sıvı kalmış olsaydı buharlaşmaya devam ederdi. Sonuç olarak **suyun tamamı buharlaşır**.

Eşdeğer olarak, kaptaki su buharını tam doygunluğa ulaştırmak için gereken su kütlesi

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g},$$

olup mevcut 3 g'dan fazladır. Doygunluğu suyun **kısmi basıncı** belirler.

Dolayısıyla son toplam basınç

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

Bu sonucun dayandığı varsayımlar şunlardır:

- **Kap hacminin sabit olması:** kabın ısı genleşmesi ve basınç nedeniyle şekil değiştirmesi ihmal edilebilir.
- **Hava miktarının korunması:** su eklenirken hava dışarı kaçmaz ve kap sızdırmazlığını korur.
- **İdeal gaz davranışı:** hava ve su buharı ideal gaz yasasına ve Dalton yasasına uyar. Bunlar, belirtilen sıcaklık ve basınçlarda makul yaklaşımlardır.
- **Denge:** kabın tüm içeriğinin 100°C'ye ulaşması ve buharlaşmanın tamamlanması için yeterli ısı ve süre sağlanır. Buharlaşma gizli ısı, verilmesi gereken ısı miktarını etkiler; ancak belirtilen sıcaklıktaki son basıncı etkilemez.

Çözüm, resmi çözümle karşılaştırılarak kontrol edildi.