

IPhO 1967

Теоретические задачи и решения · Варшава, Польша · 4 теоретические задачи с полными решениями

eulersolve.org/ipho/1967/

Задача 1: Пуля, проходящая сквозь шар, покоящийся на столбе

Небольшой шар массой $M = 0.2$ кг покоится на вертикальном столбе высотой $h = 5$ м. Пуля массой $m = 0.01$ кг, движущаяся со скоростью $v_0 = 500$ м/с, проходит горизонтально через центр шара (рис. 1). Шар падает на землю на расстоянии $s = 20$ м. Где упадёт на землю пуля? Какая часть кинетической энергии пули превратилась в теплоту при прохождении пули сквозь шар? Сопротивлением воздуха пренебречь. Принять $g = 10$ м/с².

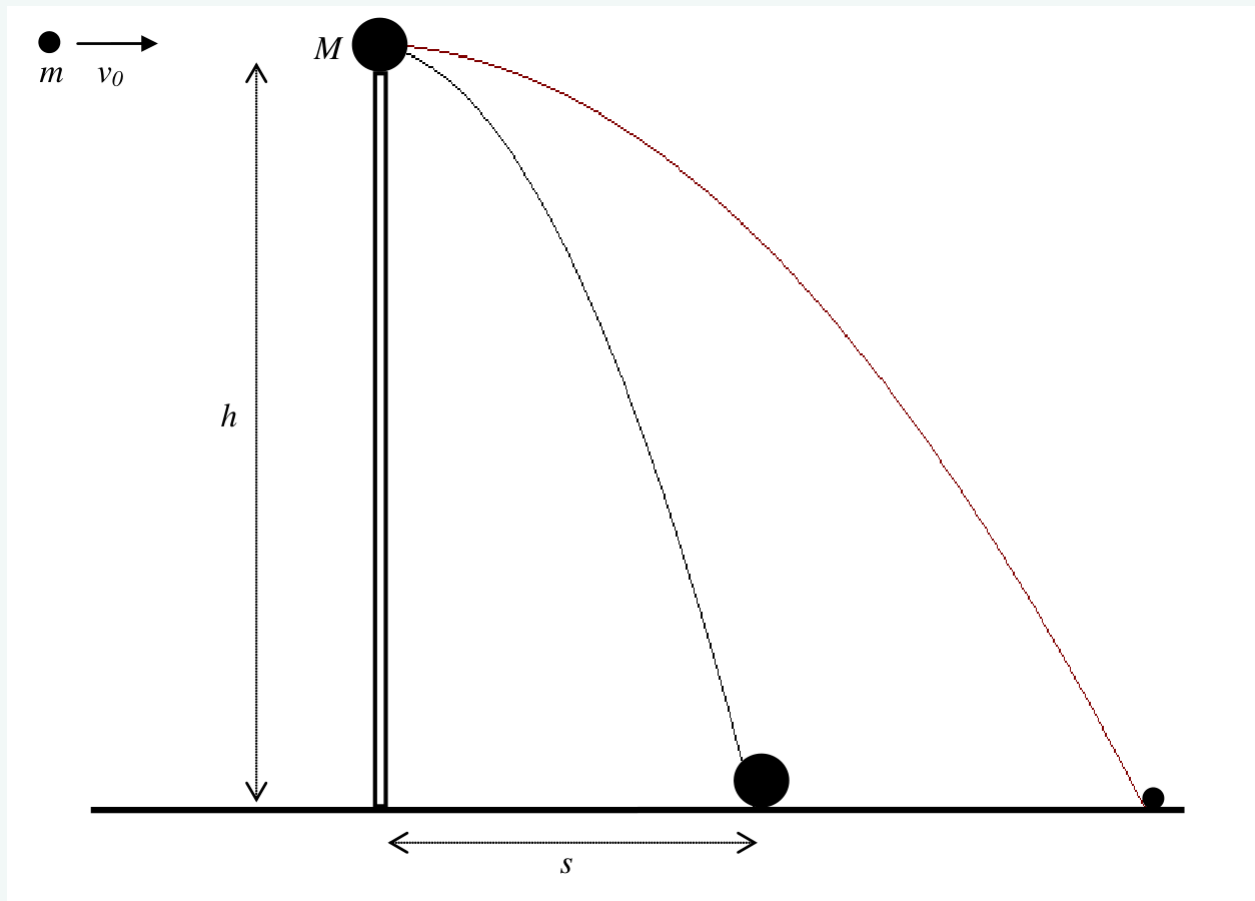


Рис. 1

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Место падения пули:** на расстоянии 100 m по горизонтали от основания столба в первоначальном направлении движения пули — на 80 m дальше шара.
- **Энергия, превратившаяся в теплоту:** $Q = 1160\text{ J}$, что составляет 92.8% начальной кинетической энергии пули.

Решение

Место падения пули

Будем рассматривать шар и пулю как материальные точки и считать время прохождения пули сквозь шар пренебрежимо малым по сравнению со временем последующего падения.

Центральный горизонтальный удар приводит к горизонтальному поступательному движению без вращения. За короткое время удара горизонтальный импульс внешних сил пренебрежимо мал, поэтому горизонтальная составляющая импульса системы сохраняется.

После прохождения пули сквозь шар оба тела начинают падать с высоты h с нулевой вертикальной скоростью. Поэтому время падения у них одинаково и равно

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1\text{ s}.$$

При отсутствии сопротивления воздуха горизонтальная скорость шара V остаётся постоянной. По измеренной дальности его полёта получаем

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20\text{ m s}^{-1}.$$

Обозначим через v горизонтальную скорость пули после прохождения сквозь шар. Закон сохранения горизонтальной составляющей импульса даёт

$$mv_0 = mv + MV,$$

откуда

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100\text{ m s}^{-1}.$$

Таким образом, дальность полёта пули по горизонтали от столба равна

$$x = vt = (100)(1) = 100\text{ m}.$$

Энергия, превратившаяся в теплоту

При прохождении пули сквозь шар кинетическая энергия не сохраняется. В идеализированной модели задачи уменьшение суммарной кинетической энергии соответствует энергии, превратившейся в теплоту. Изменением гравитационной потенциальной энергии за короткое время прохождения пули сквозь шар можно пренебречь.

Первоначально кинетической энергией обладает только пуля:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250\text{ J}.$$

Сразу после прохождения пули сквозь шар суммарная кинетическая энергия равна

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J}.$$

Следовательно,

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J}.$$

Искомая доля начальной кинетической энергии пули равна

$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

Энергию 40 J, переданную шару и затраченную на его движение, необходимо исключить из количества теплоты.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 2: Сопротивление бесконечной сети резисторов

Рассмотрим бесконечную сеть, состоящую из резисторов (сопротивление каждого из них равно r), показанную на рис. 3. Найдите эквивалентное сопротивление R_{AB} между точками A и B.

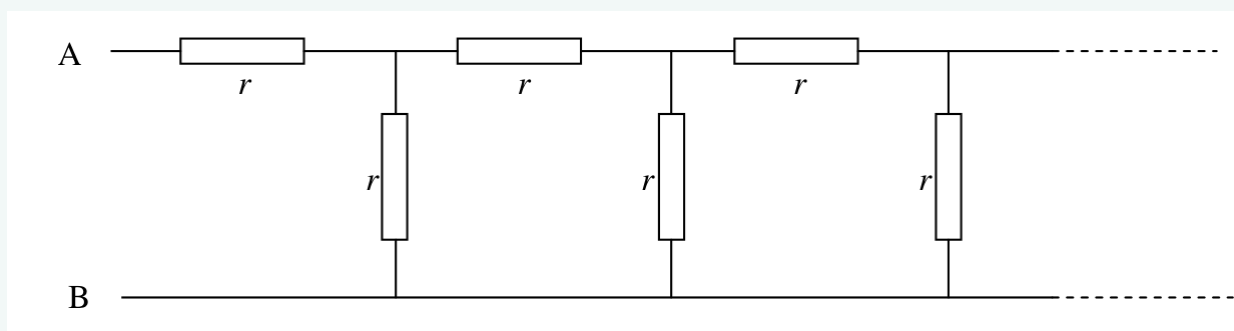


Рис. 3

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- Задача 2: $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$

Решение

Будем считать сопротивление соединительных проводов пренебрежимо малым, а каждый резистор — идеальным резистором, подчиняющимся закону Ома, с сопротивлением $r > 0$.

Пусть $R = R_{AB}$. Ток, входящий в точке А, сначала должен пройти через первый горизонтальный резистор с сопротивлением r . В следующем узле имеются два пути к нижнему проводу, соединённому с точкой В:

- Первый вертикальный резистор с сопротивлением r .
- Вся оставшаяся лестничная цепь, которая имеет точно такую же структуру, как и исходная сеть, и потому обладает сопротивлением R .

Эти две ветви соединены параллельно, а их эквивалентное сопротивление соединено последовательно с первым горизонтальным резистором. Поэтому правила расчёта сопротивления при последовательном и параллельном соединении дают

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r + R}.$$

Умножая на $r + R$ и перегруппировывая слагаемые, получаем

$$\begin{aligned} R(r + R) &= r(r + R) + rR, \\ R^2 - rR - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

Отрицательный корень недопустим для сети с положительными сопротивлениями, поэтому остаётся

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

Чтобы обосновать переход к бесконечной лестничной цепи, обозначим через R_n сопротивление конечной лестничной цепи, заканчивающейся после n -го вертикального резистора. Тогда

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r + R_n}.$$

Здесь $R_2 = 5r/3 < R_1$. Поскольку правая часть является возрастающей функцией R_n , по индукции получаем, что $R_{n+1} < R_n$ для любого n . Кроме того, $R_n > r$, так как первый горизонтальный резистор соединён последовательно с положительным сопротивлением. Следовательно, последовательность R_n сходится, и её предел удовлетворяет уравнению, решённому выше.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 3: Одинаковое количество теплоты, сообщённое подвешенному шару и шару, лежащему на плоскости

Рассмотрим два одинаковых однородных шара А и В с одинаковыми начальными температурами. Один из них покоится на горизонтальной плоскости, а второй подвешен на нити (рис. 6). Обоим шарам сообщили одинаковое количество теплоты. Будут ли конечные

температуры шаров одинаковыми? Обоснуйте свой ответ. (Всеми видами тепловых потерь можно пренебречь.)



Рис. 6

Условие переведено с официального английского текста.

Ответы

- **Задача 3:** В обычной элементарной модели, в предположении положительного теплового расширения, **подвешенный шар А нагреется до более высокой температуры, чем покоящийся на плоскости шар В:**

$$T_A > T_B.$$

Решение

Предположим, что плоскость жёсткая, длина нити неизменна и оба шара при нагревании расширяются равномерно. Используем элементарное приближение, согласно которому изменения их внутренней энергии одинаковым образом зависят от температуры, пренебрегая влиянием напряжений, обусловленных наличием опоры или подвеса.

Пусть начальные радиус и температура каждого шара равны R_0 и T_0 . Обозначим одинаковую для обоих шаров массу через m , а количество теплоты, сообщённое каждому из них, — через Q .

При увеличении радиуса на ΔR :

- У шара **А** верхняя точка крепления остаётся неподвижной, поэтому его центр масс **опускается** на ΔR .
- У шара **В** нижняя точка остаётся на плоскости, поэтому его центр масс **поднимается** на ΔR .

Следовательно, изменения их потенциальной энергии в поле тяжести равны

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

Неподвижные опоры не совершают работы. Закон сохранения энергии даёт

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

где работой против атмосферного давления, учитываемой одинаковым образом для обоих шаров, можно либо пренебречь, либо включить её в слагаемое, описывающее изменение внутренней энергии. Таким образом,

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

При положительном тепловом расширении оба изменения радиуса положительны. Следовательно,

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

При принятой одинаковой для обоих шаров возрастающей зависимости внутренней энергии от температуры отсюда следует

$$T_A > T_B.$$

Для получения явных выражений обозначим через c одинаковую для обоих шаров удельную теплоёмкость, а через $\alpha > 0$ — коэффициент линейного расширения, считая их постоянными в небольшом интервале температур. Полагая $\Delta T_i = T_i - T_0$, получаем

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

Уравнения энергетического баланса принимают вид

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

откуда

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

В обычных условиях $g\alpha R_0 \ll c$, что и даёт указанное соотношение температур.

Физически шар А при расширении высвобождает потенциальную энергию в поле тяжести, тогда как шар В расходует часть сообщённой энергии на подъём своего центра масс. По приведённым данным нельзя вычислить численное значение разности температур.

Решение проверено по официальному решению.

Задача 4: Давление в закрытом сосуде с воздухом и испарившейся водой

Комментарий: Организационный комитет подготовил три теоретические задачи. К сожалению, во время проведения 1-й олимпиады румынские школьники выпускного класса сдавали вступительные экзамены в университеты. Поэтому Румыния направила команду, состоявшую из учеников младших классов. Они ещё не изучали электричество. Чтобы дать им шанс, организаторы (по согласованию с Международным жюри) добавили представленную здесь четвертую задачу. Участникам (не только из Румынии) разрешили выбрать три задачи. Максимальные оценки за задачи составляли: 1-я задача — 10 баллов, 2-я задача — 10 баллов, 3-я задача — 10 баллов и 4-я задача — 6 баллов. Четвертую задачу решили 8 участников. Только четверо из них решили её на 6 баллов.

Закрытый сосуд объёмом $V_0 = 10$ л содержит сухой воздух при нормальных условиях ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1$ atm). В некоторый момент в сосуд добавили 3 г воды и нагрели систему до $t = 100^\circ\text{C}$. Найдите давление в сосуде. Обсудите допущения, которые вы сделали при решении задачи.

Ответы

- **Задача 4 (6 баллов):** Конечное абсолютное давление равно

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Все 3 g воды испаряются; образовавшийся пар является ненасыщенным. При этом предполагается, что сосуд жёсткий, при добавлении воды воздух не теряется, газы ведут себя как идеальные, а при 100°C устанавливается тепловое и фазовое равновесие.

Решение

Задача 4

Используем абсолютные температуры:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Для идеальной газовой смеси по закону Дальтона полное давление равно сумме парциальных давлений воздуха и водяного пара:

$$p = p_a + p_v.$$

Количество вещества воздуха постоянно. Применяя уравнение состояния идеального газа к начальному и конечному состояниям, получаем

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

Таким образом,

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm}.$$

Необходимо определить, испарится ли вся добавленная вода. Если она испарится полностью, количество вещества пара составит

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol}.$$

Соответствующее парциальное давление было бы равно

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm}.$$

При 100°C давление насыщенного водяного пара приблизительно равно

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm}.$$

Поскольку

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

даже при полном испарении образуется ненасыщенный пар. Поэтому любая оставшаяся жидкость продолжала бы испаряться. Следовательно, **вся вода испаряется**.

К тому же выводу можно прийти, определив массу воды, необходимую для того, чтобы пар в сосуде стал насыщенным:

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g},$$

что превышает имеющиеся 3 g. Насыщение определяется **парциальным давлением** водяного пара.

Таким образом, конечное полное давление равно

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa}.$$

В основе этого результата лежат следующие допущения:

- **Постоянный объём сосуда:** тепловым расширением и деформацией сосуда под действием давления можно пренебречь.
- **Сохранение количества воздуха:** при добавлении воды воздух не выходит наружу, и сосуд остаётся герметичным.
- **Поведение идеального газа:** воздух и водяной пар подчиняются уравнению состояния идеального газа и закону Дальтона. При указанных температуре и давлениях эти приближения обоснованны.
- **Равновесие:** подводится достаточное количество теплоты и предоставляется достаточно времени, чтобы всё содержимое достигло 100°C и испарение завершилось. Скрытая теплота испарения влияет на необходимое количество подводимой теплоты, но не на конечное давление при заданной температуре.

Решение проверено по официальному решению.