

IPhO 1967

Problemas teóricos y soluciones · Varsovia, Polonia · 4 problemas teóricos con soluciones completas

eulersolve.org/ipho/1967/

Problema 1: Una bala atraviesa una bola en reposo sobre una columna

Una pequeña bola de masa $M = 0.2$ kg reposa sobre una columna vertical de altura $h = 5$ m. Una bala de masa $m = 0.01$ kg, que se mueve con una velocidad $v_0 = 500$ m/s, atraviesa horizontalmente el centro de la bola (Fig. 1). La bola llega al suelo a una distancia $s = 20$ m. ¿Dónde llega la bala al suelo? ¿Qué fracción de la energía cinética de la bala se convirtió en calor al atravesar la bola? Desprecie la resistencia del aire. Suponga que $g = 10$ m/s².

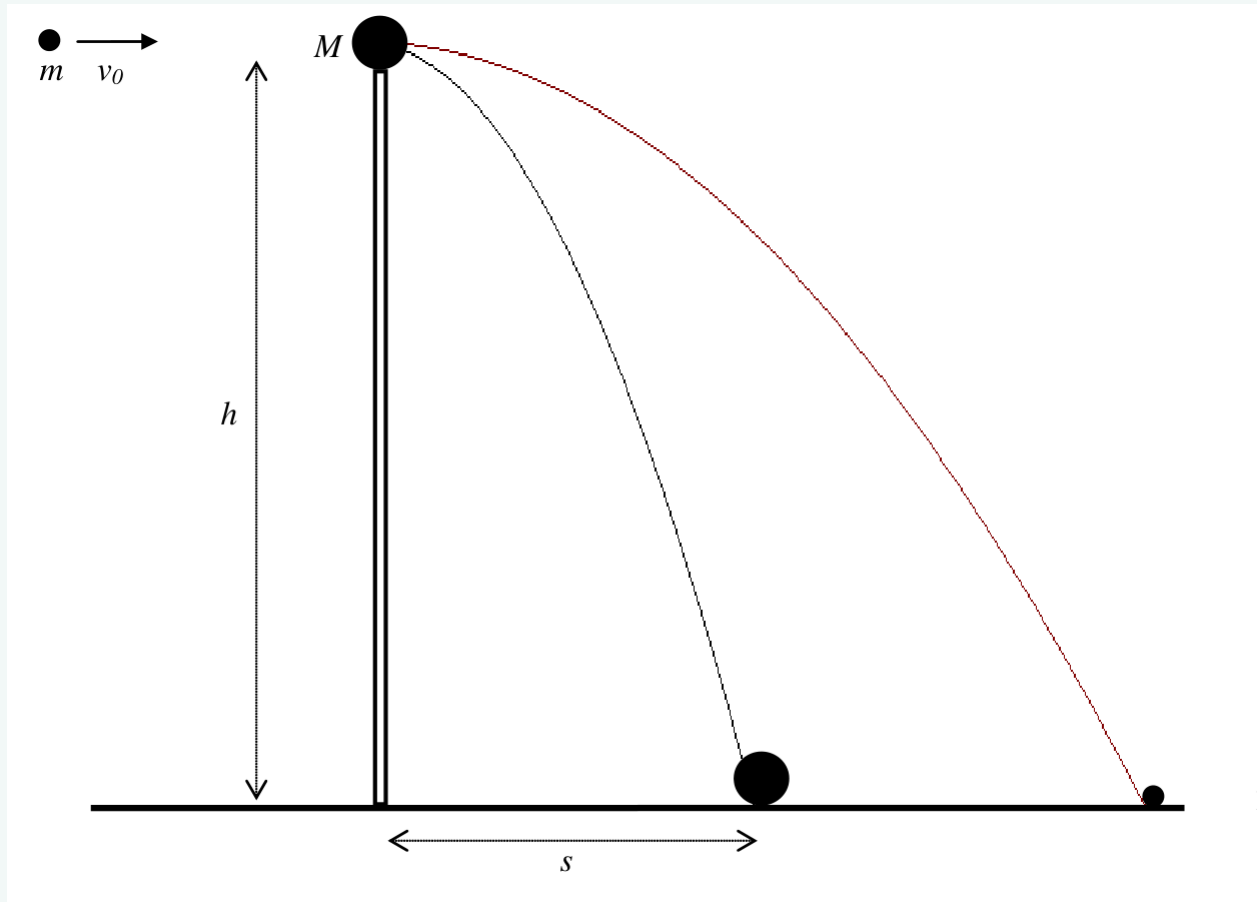


Fig. 1

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Punto de caída de la bala:** $\boxed{100 \text{ m}}$ horizontalmente desde el pie de la columna, en la dirección original de movimiento de la bala, a 80 m más allá de la bola.
- **Energía convertida en calor:** $\boxed{Q = 1160 \text{ J}}$, correspondiente al $\boxed{92.8\%}$ de la energía cinética inicial de la bala.

Solución

Punto de caída de la bala

Trate la bola y la bala como partículas y considere que el tiempo que tarda la bala en atravesar la bola es despreciable en comparación con el tiempo de caída posterior. El impacto central y horizontal produce un movimiento de traslación horizontal sin rotación. Durante el breve impacto, el impulso externo horizontal es despreciable, por lo que se conserva la cantidad de movimiento horizontal.

Después de que la bala atraviese la bola, ambos objetos comienzan a caer desde la altura h con velocidad vertical nula. Por tanto, su tiempo de caída común es

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1 \text{ s}.$$

En ausencia de resistencia del aire, la velocidad horizontal V de la bola permanece constante. A partir de su alcance medido se obtiene

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20 \text{ m s}^{-1}.$$

Sea v la velocidad horizontal de la bala después de atravesar la bola. La conservación de la cantidad de movimiento horizontal da

$$mv_0 = mv + MV,$$

de donde

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100 \text{ m s}^{-1}.$$

Por tanto, el alcance horizontal de la bala desde la columna es

$$\boxed{x = vt = (100)(1) = 100 \text{ m}}.$$

Energía convertida en calor

La energía cinética no se conserva mientras la bala atraviesa la bola. En el modelo idealizado del problema, la disminución de la energía cinética total se convierte en calor. La variación de la energía potencial gravitatoria durante el breve tiempo que dura el paso de la bala es despreciable.

Inicialmente, solo la bala tiene energía cinética:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250 \text{ J}.$$

Inmediatamente después de que la bala atraviese la bola, la energía cinética total es

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J}.$$

Por tanto,

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J}.$$

La fracción solicitada de la energía cinética inicial de la bala es

$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

Los 40 J transferidos al movimiento de la bola deben excluirse del calor.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 2: Resistencia de una red infinita de resistencias

Considere una red infinita formada por resistencias (cada una de ellas de resistencia r), como se muestra en la Fig. 3. Determine la resistencia equivalente R_{AB} entre los puntos A y B.

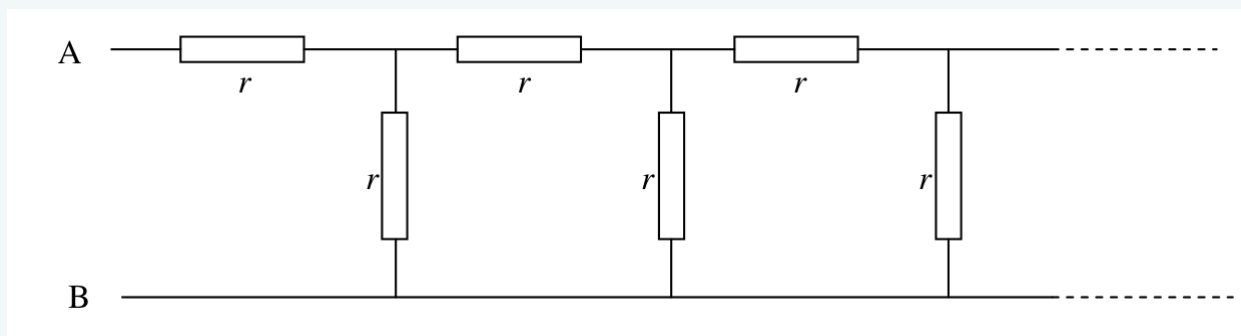


Fig. 3

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 2:** $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$

Solución

Considere que los cables de conexión tienen una resistencia despreciable y que cada resistencia es un elemento óhmico ideal con $r > 0$.

Sea $R = R_{AB}$. La corriente que entra por A debe pasar primero por la primera resistencia horizontal, de resistencia r . En el siguiente nodo, hay dos caminos hacia el cable inferior conectado a B:

- La primera resistencia vertical, de resistencia r .

- Toda la parte restante de la red en escalera, que tiene exactamente la misma estructura que la red original y, por tanto, tiene resistencia R .

Estos dos caminos están en paralelo, y su resistencia equivalente está en serie con la primera resistencia horizontal. Por tanto, las leyes de asociación de resistencias en serie y en paralelo dan

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r+R}.$$

Multiplicando por $r + R$ y reordenando,

$$\begin{aligned} R(r+R) &= r(r+R) + rR, \\ R^2 - rR - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Así,

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

La raíz negativa no es admisible para una red de resistencias positivas, por lo que queda

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

Para justificar el uso de una red en escalera infinita, sea R_n la resistencia de una red en escalera finita que termina tras su n -ésima resistencia vertical. Entonces

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r+R_n}.$$

Aquí, $R_2 = 5r/3 < R_1$. Como el miembro derecho es una función creciente de R_n , por inducción se demuestra que $R_{n+1} < R_n$ para todo n . Además, $R_n > r$, porque la primera resistencia horizontal está en serie con una resistencia positiva. Por tanto, R_n converge, y su límite satisface la ecuación resuelta anteriormente.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 3: Igual cantidad de calor suministrada a una esfera colgante y a una esfera apoyada sobre un plano

Considérense dos esferas homogéneas idénticas, A y B, con la misma temperatura inicial. Una de ellas está en reposo sobre un plano horizontal, mientras que la otra cuelga de un hilo (Fig. 6). Se han suministrado las mismas cantidades de calor a ambas esferas. ¿Son iguales o no las temperaturas finales de las esferas? Justifique su respuesta. (Todas las pérdidas de calor son despreciables.)



Fig. 6

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 3:** En el modelo elemental habitual, suponiendo una dilatación térmica positiva, **la esfera colgante A alcanza una temperatura mayor que la esfera apoyada B:**

$$T_A > T_B.$$

Solución

Supongamos que el plano es rígido, que el hilo tiene una longitud fija y que ambas esferas se dilatan uniformemente al calentarse. Utilizamos la aproximación elemental de que sus variaciones de energía térmica tienen la misma dependencia con la temperatura, despreciando la influencia de las tensiones debidas a la sustentación.

Sea R_0 el radio inicial de cada esfera y T_0 su temperatura inicial. Denotemos por m la masa común de las esferas y por Q el calor suministrado a cada una.

Cuando el radio aumenta en ΔR :

- Para **A**, el punto superior de sujeción permanece fijo, por lo que su centro de masa **desciende** una distancia ΔR .
- Para **B**, su punto más bajo permanece sobre el plano, por lo que su centro de masa **asciende** una distancia ΔR .

Por tanto, sus variaciones de energía potencial gravitatoria son

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

Los soportes inmóviles no realizan trabajo. La conservación de la energía da

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

donde el trabajo contra la presión atmosférica, común a ambas esferas, puede despreciarse o incluirse en el término de energía térmica. Así,

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

Para una dilatación térmica positiva, ambas variaciones del radio son positivas. En consecuencia,

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

Con la relación creciente entre la energía térmica y la temperatura que hemos supuesto común a ambas esferas, esto implica

$$T_A > T_B.$$

Explícitamente, sean c la capacidad calorífica específica común y $\alpha > 0$ el coeficiente de dilatación lineal, considerados constantes en un pequeño intervalo de temperatura. Escribiendo $\Delta T_i = T_i - T_0$,

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

Los balances de energía quedan

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

y, por tanto,

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

En condiciones ordinarias, $g\alpha R_0 \ll c$, lo que da la relación de orden indicada.

Desde el punto de vista físico, A libera energía potencial gravitatoria al dilatarse, mientras que B utiliza parte de la energía suministrada para elevar su centro de masa. No se puede calcular una diferencia numérica de temperatura a partir de la información proporcionada.

La solución se comprobó con la solución oficial.

Problema 4: Presión en un recipiente cerrado con aire y agua evaporada

Comentario: El Comité Organizador preparó tres problemas teóricos. Lamentablemente, en el momento de la 1.ª Olimpiada, los estudiantes rumanos del último curso tenían los exámenes de ingreso a las universidades. Por ello, Rumanía envió un equipo formado por estudiantes de cursos inferiores. No estaban familiarizados con la electricidad. Para darles una oportunidad, los organizadores (con el acuerdo del Consejo Internacional) añadieron el cuarto problema que se presenta aquí. Se permitió a los estudiantes (no solo a los de Rumanía) elegir tres problemas. Las puntuaciones máximas posibles de los problemas eran: 1.er problema – 10 puntos, 2.º problema – 10 puntos, 3.er problema – 10 puntos y 4.º problema – 6 puntos. El cuarto problema fue resuelto por 8 estudiantes. Solo cuatro de ellos lo resolvieron obteniendo los 6 puntos.

Un recipiente cerrado de volumen $V_0 = 10 \text{ l}$ contiene aire seco en condiciones normales ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1 \text{ atm}$). En un momento dado, se añadieron 3 g de agua al recipiente y se calentó el sistema hasta $t = 100^\circ\text{C}$. Determine la presión en el recipiente. Discuta las hipótesis que haya adoptado para resolver el problema.

Enunciado traducido del texto oficial en inglés.

Respuestas

- **Problema 4 (6 puntos):** La presión absoluta final es

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Los 3 g de agua se evaporan por completo; el vapor resultante no está saturado. Esto supone un recipiente rígido, ninguna pérdida de aire durante la adición del agua, comportamiento de gas ideal y equilibrio térmico y de fases a 100°C.

Solución

Problema 4

Utilizamos temperaturas absolutas:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Para una mezcla ideal, la ley de Dalton expresa la presión total como la suma de las presiones parciales del aire y del vapor de agua:

$$p = p_a + p_v.$$

La cantidad de aire es constante. Aplicando la ecuación de estado de los gases ideales a los estados inicial y final,

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

Por tanto,

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm}.$$

Debemos determinar si toda el agua añadida se evapora. Si es así, su cantidad de sustancia es

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol}.$$

La presión parcial correspondiente sería

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm}.$$

A 100°C, la presión de vapor de saturación del agua es aproximadamente

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm}.$$

Como

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

incluso la evaporación completa produce vapor no saturado. Por lo tanto, cualquier cantidad de líquido que quedara seguiría evaporándose. En consecuencia, **toda el agua se evapora.**

De forma equivalente, la masa de agua necesaria para alcanzar justo la saturación en el recipiente es

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g},$$

que supera los 3 g disponibles. La saturación está determinada por la **presión parcial** del agua.

La presión total final es, por tanto,

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Las hipótesis en las que se basa este resultado son:

- **Volumen constante del recipiente:** la dilatación térmica y la deformación del recipiente debida a la presión son despreciables.
- **Conservación del aire:** la adición del agua no permite que escape aire y el recipiente permanece herméticamente cerrado.
- **Comportamiento de gas ideal:** el aire y el vapor de agua obedecen la ecuación de estado de los gases ideales y la ley de Dalton. Estas son aproximaciones razonables a la temperatura y las presiones indicadas.
- **Equilibrio:** se suministra suficiente calor y se deja transcurrir suficiente tiempo para que todo el contenido alcance 100°C y para que la evaporación termine. El calor latente de evaporación afecta al aporte de calor necesario, pero no a la presión final a la temperatura especificada.

La solución se comprobó con la solución oficial.