

IPhO 1967

Theorieaufgaben und Lösungen · Warschau, Polen · 4 Theorieaufgaben mit vollständigen Lösungen

eulersolve.org/ipho/1967/

Aufgabe 1: Geschoss durchschlägt eine auf einer Säule ruhende Kugel

Eine kleine Kugel mit der Masse $M = 0.2 \text{ kg}$ ruht auf einer senkrechten Säule der Höhe $h = 5 \text{ m}$. Ein Geschoss mit der Masse $m = 0.01 \text{ kg}$, das sich mit der Geschwindigkeit $v_0 = 500 \text{ m/s}$ bewegt, durchschlägt die Kugel horizontal durch ihren Mittelpunkt (Abb. 1). Die Kugel trifft in einer Entfernung von $s = 20 \text{ m}$ auf den Boden. Wo trifft das Geschoss auf den Boden? Welcher Anteil der kinetischen Energie des Geschosses wurde beim Durchschlagen der Kugel in Wärme umgewandelt? Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand. Nehmen Sie an, dass $g = 10 \text{ m/s}^2$ gilt.

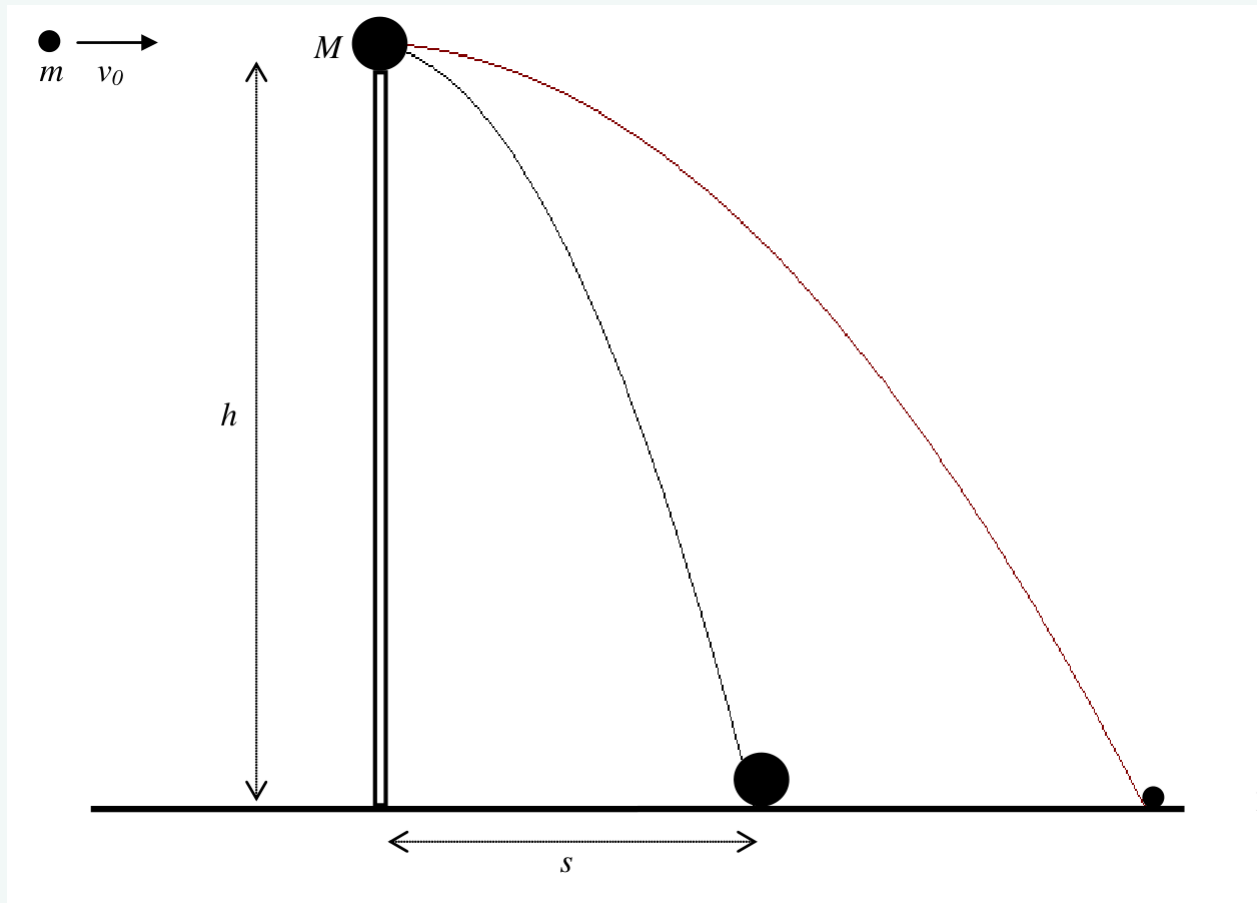


Abb. 1

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Auftreffpunkt des Geschosses:** 100 m horizontal vom Fuß der Säule entfernt, in der ursprünglichen Bewegungsrichtung des Geschosses — 80 m hinter der Kugel.
- **In Wärme umgewandelte Energie:** $Q = 1160\text{ J}$, entsprechend 92.8% der anfänglichen kinetischen Energie des Geschosses.

Lösung

Auftreffpunkt des Geschosses

Wir behandeln Kugel und Geschoss als Massenpunkte und nehmen an, dass die Durchschlagsdauer gegenüber der anschließenden Fallzeit vernachlässigbar ist. Der zentrale, horizontale Stoß bewirkt eine horizontale Translationsbewegung ohne Rotation. Während des kurzen Stoßes ist der äußere horizontale Kraftstoß vernachlässigbar, sodass der horizontale Impuls erhalten bleibt.

Nach dem Durchschlagen beginnen beide Körper aus der Höhe h mit einer vertikalen Anfangsgeschwindigkeit von null zu fallen. Ihre gemeinsame Fallzeit beträgt daher

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1\text{ s}.$$

Ohne Luftwiderstand bleibt die horizontale Geschwindigkeit V der Kugel konstant. Aus ihrer gemessenen Wurfweite ergibt sich

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20\text{ m s}^{-1}.$$

Sei v die horizontale Geschwindigkeit des Geschosses nach dem Durchschlagen der Kugel. Aus der Erhaltung des horizontalen Impulses folgt

$$mv_0 = mv + MV,$$

also

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100\text{ m s}^{-1}.$$

Die horizontale Wurfweite des Geschosses von der Säule aus beträgt somit

$$x = vt = (100)(1) = 100\text{ m}.$$

In Wärme umgewandelte Energie

Die kinetische Energie bleibt beim Durchschlagen nicht erhalten. Im idealisierten Modell der Aufgabe wird die Abnahme der gesamten kinetischen Energie in Wärme umgewandelt. Die Änderung der potenziellen Energie im Schwerfeld während des kurzen Durchschlages ist vernachlässigbar.

Anfangs besitzt nur das Geschoss kinetische Energie:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250\text{ J}.$$

Unmittelbar nach dem Durchschlagen beträgt die gesamte kinetische Energie

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J.}$$

Daher gilt

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J.}$$

Der gesuchte Anteil an der anfänglichen kinetischen Energie des Geschosses beträgt

$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

Die 40 J, die auf die Bewegung der Kugel übertragen werden, dürfen nicht zur Wärme gezählt werden.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 2: Widerstand eines unendlichen Widerstandsnetzwerks

Betrachten Sie das in Abb. 3 dargestellte unendliche Netzwerk aus Widerständen (jeder mit dem Widerstand r). Bestimmen Sie den Ersatzwiderstand R_{AB} zwischen den Punkten A und B.

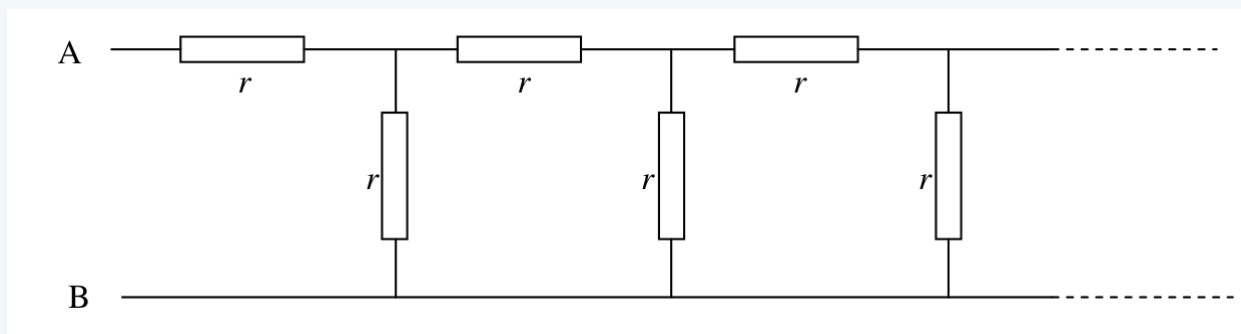


Abb. 3

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- Aufgabe 2: $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$

Lösung

Nehmen wir an, dass die Verbindungsleitungen einen vernachlässigbaren Widerstand haben und jeder Widerstand ein idealer ohmscher Widerstand mit $r > 0$ ist.

Sei $R = R_{AB}$. Der bei A eintretende Strom muss zunächst durch den ersten horizontalen Widerstand mit dem Widerstandswert r fließen. Am darauffolgenden Knoten gibt es zwei Strompfade zur unteren, mit B verbundenen Leitung:

- Den ersten vertikalen Widerstand mit dem Widerstandswert r .

- Die gesamte verbleibende Leiterschaltung, die genau dieselbe Struktur wie das ursprüngliche Netzwerk hat und daher den Widerstand R besitzt.

Diese beiden Strompfade sind parallel geschaltet, und ihr Ersatzwiderstand liegt in Reihe mit dem ersten horizontalen Widerstand. Die Regeln für die Reihen- und Parallelschaltung von Widerständen ergeben daher

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r+R}.$$

Durch Multiplikation mit $r + R$ und Umformen erhält man

$$\begin{aligned} R(r+R) &= r(r+R) + rR, \\ R^2 - rR - r^2 &= 0. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

Die negative Lösung ist für ein Netzwerk aus positiven Widerständen unzulässig; damit verbleibt

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

Um die Verwendung einer unendlichen Leiterschaltung zu rechtfertigen, bezeichne R_n den Widerstand einer endlichen Leiterschaltung, die nach ihrem n -ten vertikalen Widerstand endet. Dann gilt

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r+R_n}.$$

Hier ist $R_2 = 5r/3 < R_1$. Da die rechte Seite eine monoton wachsende Funktion von R_n ist, zeigt vollständige Induktion, dass $R_{n+1} < R_n$ für jedes n gilt. Außerdem gilt $R_n > r$, da der erste horizontale Widerstand mit einem positiven Widerstand in Reihe geschaltet ist. Daher konvergiert R_n , und sein Grenzwert erfüllt die oben gelöste Gleichung.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 3: Gleiche Wärmezufuhr zu einer hängenden Kugel und einer auf einer Ebene ruhenden Kugel

Betrachten Sie zwei identische homogene Kugeln A und B mit derselben Anfangstemperatur. Eine von ihnen ruht auf einer horizontalen Ebene, während die zweite an einem Faden hängt (Abb. 6). Beiden Kugeln wurden gleiche Wärmemengen zugeführt. Sind die Endtemperaturen der Kugeln gleich oder nicht? Begründen Sie Ihre Antwort. (Wärmeverluste jeglicher Art sind vernachlässigbar.)



Abb. 6

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 3:** Im üblichen elementaren Modell wird unter der Annahme einer positiven Wärmeausdehnung **die hängende Kugel A wärmer als die ruhende Kugel B:**

$$T_A > T_B.$$

Lösung

Wir nehmen an, dass die Ebene starr ist, der Faden eine feste Länge hat und sich beide Kugeln bei Erwärmung gleichmäßig ausdehnen. Wir verwenden die elementare Näherung, dass die Änderungen ihrer thermischen Energie in gleicher Weise von der Temperatur abhängen, wobei wir den Einfluss der durch die Abstützung beziehungsweise Aufhängung verursachten mechanischen Spannungen vernachlässigen.

Jede Kugel habe anfangs den Radius R_0 und die Temperatur T_0 . Ihre gemeinsame Masse bezeichnen wir mit m und die jeder Kugel zugeführte Wärme mit Q .

Wenn der Radius um ΔR zunimmt:

- Bei **A** bleibt der obere Befestigungspunkt fest, sodass ihr Schwerpunkt um ΔR **absinkt**.
- Bei **B** bleibt der tiefste Punkt auf der Ebene, sodass ihr Schwerpunkt um ΔR **ansteigt**.

Die Änderungen ihrer potenziellen Energie im Schwerfeld sind daher

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

Die ortsfesten Halterungen verrichten keine Arbeit. Aus der Energieerhaltung folgt

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

wobei die bei beiden Kugeln auftretende Arbeit gegen den Atmosphärendruck entweder vernachlässigt oder in den Term für die thermische Energie einbezogen werden kann. Somit gilt

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

Bei positiver Wärmeausdehnung sind beide Radiusänderungen positiv. Folglich gilt

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

Mit dem angenommenen gemeinsamen, monoton steigenden Zusammenhang zwischen thermischer Energie und Temperatur folgt daraus

$$T_A > T_B.$$

Sei nun ausdrücklich c die gemeinsame spezifische Wärmekapazität und $\alpha > 0$ der lineare Ausdehnungskoeffizient, die über ein kleines Temperaturintervall als konstant betrachtet werden. Mit $\Delta T_i = T_i - T_0$ gilt

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

Die Energiebilanzen lauten dann

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

und damit

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

Unter gewöhnlichen Bedingungen gilt $g\alpha R_0 \ll c$, woraus sich die angegebene Reihenfolge der Temperaturen ergibt.

Physikalisch betrachtet setzt A bei ihrer Ausdehnung potenzielle Energie im Schwerfeld frei, während B einen Teil der zugeführten Energie dazu verwendet, ihren Schwerpunkt anzuheben. Aus den gegebenen Informationen lässt sich kein Zahlenwert für die Temperaturdifferenz berechnen.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.

Aufgabe 4: Druck in einem geschlossenen Gefäß mit Luft und verdampftem Wasser

Anmerkung: Das Organisationskomitee hatte drei theoretische Aufgaben vorbereitet. Leider fanden zur Zeit der 1. Olympiade für die rumänischen Schüler der Abschlussklasse die Aufnahmeprüfungen an den Universitäten statt. Deshalb entsandte Rumänien eine Mannschaft aus Schülern jüngerer Klassen. Diese waren mit der Elektrizitätslehre nicht vertraut. Um ihnen eine Chance zu geben, ergänzten die Organisatoren (im Einvernehmen mit dem Internationalen Gremium) die hier vorgestellte vierte Aufgabe. Die Schüler (nicht nur die aus Rumänien) durften drei Aufgaben auswählen. Die maximal erreichbaren Punktzahlen für die Aufgaben betrugen: 1. Aufgabe – 10 Punkte, 2. Aufgabe – 10 Punkte, 3. Aufgabe – 10 Punkte und 4. Aufgabe – 6 Punkte. Die vierte Aufgabe wurde von 8 Schülern gelöst. Nur vier von ihnen erreichten dabei 6 Punkte.

Ein geschlossenes Gefäß mit dem Volumen $V_0 = 10 \text{ l}$ enthält trockene Luft unter Normalbedingungen ($t_0 = 0^\circ\text{C}$, $p_0 = 1 \text{ atm}$). Zu einem bestimmten Zeitpunkt werden 3 g Wasser in das Gefäß gegeben und das System auf $t = 100^\circ\text{C}$ erwärmt. Bestimmen Sie den Druck im Gefäß. Erörtern Sie die Annahmen, die Sie zur Lösung der Aufgabe getroffen haben.

Aufgabentext aus dem offiziellen englischen Text übersetzt.

Antworten

- **Aufgabe 4 (6 Punkte):** Der absolute Enddruck beträgt

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Die gesamten 3 g Wasser verdampfen; der entstehende Dampf ist ungesättigt. Dabei werden ein starres Gefäß, kein Luftverlust beim Hinzufügen des Wassers, ideales Gasverhalten sowie thermisches Gleichgewicht und Phasengleichgewicht bei 100°C vorausgesetzt.

Lösung

Aufgabe 4

Wir verwenden absolute Temperaturen:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

Für ein ideales Gemisch ergibt sich der Gesamtdruck nach dem Dalton'schen Gesetz als Summe der Partialdrücke von Luft und Wasserdampf:

$$p = p_a + p_v.$$

Die Stoffmenge der Luft bleibt konstant. Wenden wir die ideale Gasgleichung auf den Anfangs- und den Endzustand an, erhalten wir

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

Somit gilt

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm.}$$

Wir müssen feststellen, ob das gesamte hinzugefügte Wasser verdampft. Ist dies der Fall, beträgt seine Stoffmenge

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol.}$$

Der zugehörige Partialdruck wäre

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm.}$$

Bei 100°C beträgt der Sättigungsdampfdruck des Wassers ungefähr

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm.}$$

Da

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

entsteht selbst bei vollständiger Verdampfung ungesättigter Dampf. Verbleibende Flüssigkeit würde daher weiter verdampfen. Folglich **verdampft das gesamte Wasser**.

Gleichwertig lässt sich die Wassermasse berechnen, die benötigt wird, um im Gefäß gerade Sättigung zu erreichen:

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g},$$

was die verfügbaren 3 g übersteigt. Die Sättigung wird durch den **Partialdruck** des Wasserdampfs bestimmt.

Der Gesamtdruck im Endzustand beträgt daher

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

Diesem Ergebnis liegen folgende Annahmen zugrunde:

- **Konstantes Gefäßvolumen:** Die thermische Ausdehnung und die druckbedingte Verformung des Gefäßes sind vernachlässigbar.
- **Erhaltung der Luftmenge:** Beim Hinzufügen des Wassers entweicht keine Luft, und das Gefäß bleibt dicht verschlossen.
- **Ideales Gasverhalten:** Luft und Wasserdampf gehorchen der idealen Gasgleichung und dem Dalton'schen Gesetz. Bei der angegebenen Temperatur und den angegebenen Drücken sind dies angemessene Näherungen.
- **Gleichgewicht:** Es wird genügend Wärme zugeführt und ausreichend lange gewartet, damit der gesamte Inhalt 100°C erreicht und die Verdampfung abgeschlossen wird. Die Verdampfungswärme beeinflusst die erforderliche Wärmezufuhr, jedoch nicht den Enddruck bei der vorgegebenen Temperatur.

Die Lösung wurde mit der offiziellen Lösung abgeglichen.