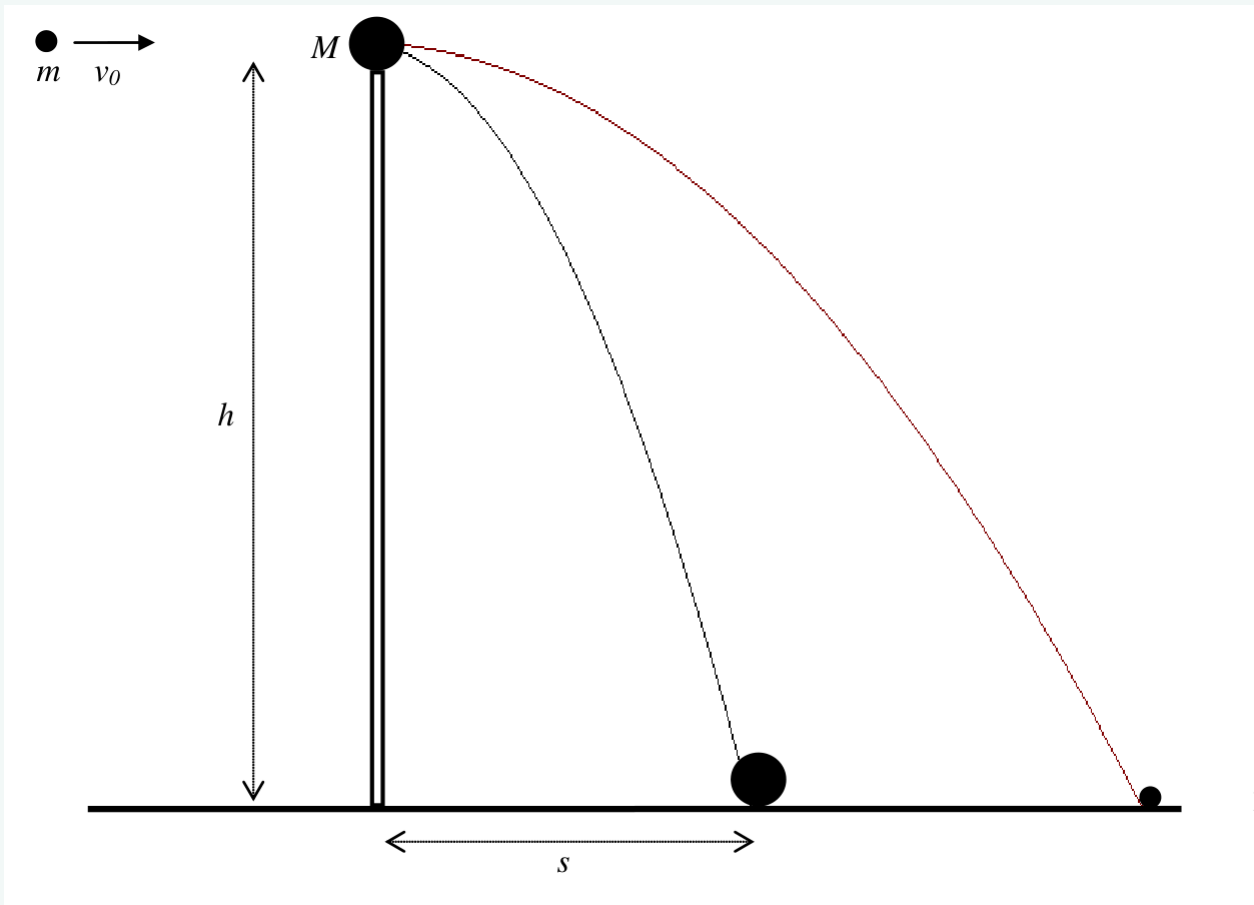


المسألة 1: رصاصة تخترق كرة تستقر على عمود

تستقر كرة صغيرة كتلتها $M = 0.2 \text{ kg}$ على عمود رأسي ارتفاعه $h = 5 \text{ m}$. تخترق رصاصة كتلتها $m = 0.01 \text{ kg}$ ، وتتحرك بسرعة $v_0 = 500 \text{ m/s}$ ، الكرة أفقيًا عبر مركزها (الشكل 1). تصل الكرة إلى الأرض على مسافة $s = 20 \text{ m}$. أين تصل الرصاصة إلى الأرض؟ ما الجزء من الطاقة الحركية للرصاصة الذي تحوّل إلى حرارة عند اختراقها الكرة؟ أهمل مقاومة الهواء. افترض أن $g = 10 \text{ m/s}^2$.



الشكل 1

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- نقطة سقوط الرصاصة: على بُعد أفقي مقداره 100 m من قاعدة العمود، في اتجاه حركة الرصاصة الأصلي، أي أبعد من نقطة سقوط الكرة بمقدار 80 m .

• الطاقة المتحوّلة إلى حرارة: $Q = 1160 \text{ J}$ ، وهو ما يعادل 92.8% من الطاقة الحركية الابتدائية للرصاصة.

الحل

نقطة سقوط الرصاصة

نُعامل الكرة والرصاصة بوصفهما جسيمين، ونعدّ زمن الاختراق مهملاً مقارنةً بزمن السقوط اللاحق. ينتج عن التصادم المركزي الأفقي حركة انتقالية أفقية من دون دوران. وخلال زمن التصادم القصير، يكون الدفع الخارجي الأفقي مهملاً، لذا تُحفظ كمية الحركة الأفقية.

بعد الاختراق، يبدأ كلا الجسيمين السقوط من ارتفاع h بسرعة رأسية معدومة. ولذلك فإن زمن سقوطهما المشترك هو

$$h = \frac{1}{2}gt^2, \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(5)}{10}} = 1 \text{ s}.$$

في غياب مقاومة الهواء، تظل السرعة الأفقية للكرة V ثابتة. ومن مداها المقاس نحصل على

$$V = \frac{s}{t} = \frac{20}{1} = 20 \text{ m s}^{-1}.$$

لتكن v السرعة الأفقية للرصاصة بعد اختراق الكرة. يعطي حفظ كمية الحركة الأفقية

$$mv_0 = mv + MV,$$

ومن ثم

$$v = v_0 - \frac{M}{m}V = 500 - \frac{0.2}{0.01}(20) = 100 \text{ m s}^{-1}.$$

إنّ، المدى الأفقي للرصاصة مقاساً من العمود هو

$$x = vt = (100)(1) = 100 \text{ m}.$$

الطاقة المتحوّلة إلى حرارة

لا تُحفظ الطاقة الحركية أثناء الاختراق. وفي النموذج المثالي للمسألة، يتحوّل النقص في الطاقة الحركية الكلية إلى حرارة. ويكون التغيّر في طاقة الوضع الثقالية خلال زمن الاختراق القصير مهملاً.

في البداية، تكون للرصاصة وحدها طاقة حركية:

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(0.01)(500)^2 = 1250 \text{ J}.$$

بعد الاختراق مباشرةً، تكون الطاقة الحركية الكلية

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}(0.01)(100)^2 + \frac{1}{2}(0.2)(20)^2 = 50 + 40 = 90 \text{ J}.$$

وعليه،

$$Q = K_i - K_f = 1250 - 90 = 1160 \text{ J}.$$

النسبة المطلوبة من الطاقة الحركية الابتدائية للرصاصة هي

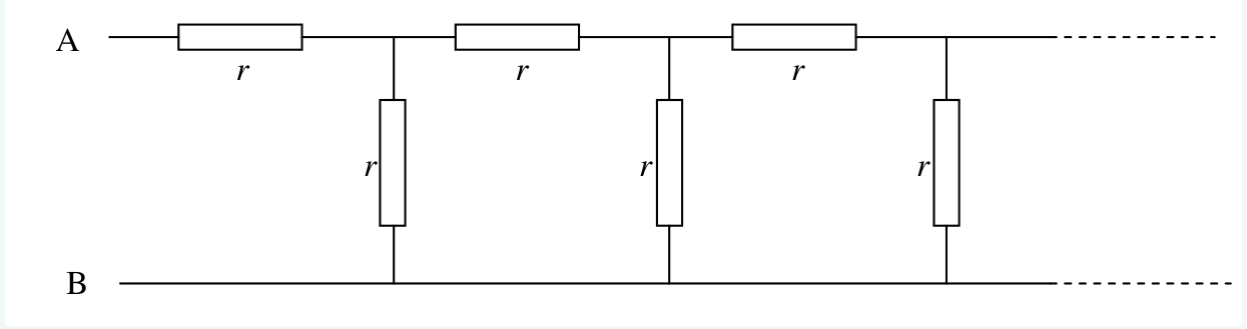
$$\frac{Q}{K_i} = \frac{1160}{1250} = 0.928 = 92.8\%.$$

يجب استبعاد الطاقة البالغة 40 J التي انتقلت إلى حركة الكرة من كمية الحرارة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 2: مقاومة شبكة لا نهائية من المقاومات

اعتبر شبكة لا نهائية تتكون من مقاومات (مقاومة كل منها r) كما هو موضح في الشكل 3. أوجد المقاومة المكافئة R_{AB} بين النقطتين A و B.



الشكل 3

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 2: $R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r$

الحل

اعتبر أن مقاومة أسلاك التوصيل مهملة، وأن كل مقاومة هي مقاومة أومية مثالية ذات $r > 0$.

لتكن $R = R_{AB}$. لا بد للتيار الداخل عند A من المرور أولاً عبر المقاومة الأفقية الأولى، وقيمتها r . وعند نقطة التفرع التالية، يوجد مساران إلى السلك السفلي المتصل بالنقطة B:

- المقاومة الرأسية الأولى، وقيمتها r .
- الجزء المتبقي بأكمله من الشبكة السلمية، الذي له البنية نفسها تماماً للشبكة الأصلية، ومن ثم فإن مقاومته تساوي R .

هذان المساران موصولان على التوازي، ومقاومتهما المكافئة موصولة على التوالي مع المقاومة الأفقية الأولى. لذلك تعطي قوانين توصيل المقاومات على التوالي وعلى التوازي

$$R = r + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right)^{-1} = r + \frac{rR}{r + R}.$$

بالضرب في $r + R$ وإعادة الترتيب،

$$R(r + R) = r(r + R) + rR,$$

$$R^2 - rR - r^2 = 0.$$

إذن

$$R = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4r^2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} r.$$

الجزء السالب غير مقبول للشبكة من المقاومات الموجبة، فيبقى

$$R_{AB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} r \approx 1.618 r.$$

لتبرير اعتبار شبكة سلمية لا نهائية، لتكن R_n مقاومة شبكة سلمية محدودة تنتهي بعد مقاومتها الرأسية ذات الرتبة n . عندئذ

$$R_1 = 2r, \quad R_{n+1} = r + \frac{rR_n}{r + R_n}.$$

هنا $R_2 = 5r/3 < R_1$. وبما أن الطرف الأيمن دالة متزايدة في R_n ، فإن الاستقراء يبين أن $R_{n+1} < R_n$ لكل n . كذلك، $R_n > r$ ، لأن المقاومة الأفقية الأولى موصولة على التوالي مع مقاومة موجبة. ومن ثم فإن R_n تتقارب، وتحقق نهايتها المعادلة التي حُلَّت أعلاه.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 3: تزويد كرة معلقة وكرة مستندة إلى سطح مستوي بكميتين متساويتين من الحرارة

لنكن لدينا كرتان متجانستان متماثلتان، A و B، لهما درجة الحرارة الابتدائية نفسها. تستقر إحدهما على سطح أفقي، بينما تتدلى الثانية من خيط (الشكل 6). زُوِّدَت الكرتان بكميتين متساويتين من الحرارة. هل تتساوى درجتا حرارتهما النهائيتين أم لا؟ علّل إجابتك. (يمكن إهمال جميع أنواع الفقد الحراري.)



الشكل 6

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

- المسألة 3: في النموذج المبسط المعتاد، وبافتراض تمدد حراري موجب، تصبح الكرة المعلقة A أسخن من الكرة المستندة إلى السطح B:

$$T_A > T_B.$$

الحل

نفترض أن السطح صلب، وأن طول الخيط ثابت، وأن كلتا الكرتين تتمددان بانتظام عند تسخينهما. نستخدم التقريب المبسط القائل إن التغير في الطاقة الحرارية لكل منهما يعتمد على درجة الحرارة بالطريقة نفسها، مع إهمال تأثير الإجهادات الناشئة عن الإسناد.

ليكن نصف قطر كل كرة في البداية R_0 ودرجة حرارتها T_0 . نرمز إلى كتلتها المشتركة بـ m ، وإلى كمية الحرارة المزودة لكل منهما بـ Q . عندما يزداد نصف القطر بمقدار ΔR :

- بالنسبة إلى A، تبقى نقطة التعليق العلوية ثابتة، لذا ينخفض مركز كتلتها بمقدار ΔR .

• بالنسبة إلى B، تبقى أدنى نقطة فيها على السطح، لذا يرتفع مركز كتلتها بمقدار ΔR .

ومن ثم فإن التغيرين في طاقة وضعهما الثقالية هما

$$\Delta E_{g,A} = -mg\Delta R_A, \quad \Delta E_{g,B} = +mg\Delta R_B.$$

لا تبذل الدعامات الساكنة أي شغل. ويعطي قانون حفظ الطاقة

$$Q = \Delta U + \Delta E_g,$$

حيث يمكن إما إهمال الشغل المبذول ضد الضغط الجوي، المشترك بين الحالتين، أو إدراجه في حد الطاقة الحرارية. وبالتالي

$$\Delta U_A = Q + mg\Delta R_A, \quad \Delta U_B = Q - mg\Delta R_B.$$

في حالة التمدد الحراري الموجب، يكون كلا التغيرين في نصف القطر موجباً. وبناءً عليه،

$$\Delta U_A > Q > \Delta U_B.$$

ومع افتراض أن العلاقة بين الطاقة الحرارية ودرجة الحرارة واحدة للكرتين ومتزايدة، فإن ذلك يعني

$$T_A > T_B.$$

وبصورة صريحة، لتكن c السعة الحرارية النوعية المشتركة للكرتين، و $\alpha > 0$ معامل التمدد الخطي، مع اعتبارهما ثابتين ضمن مجال صغير من درجات الحرارة. بكتابة $\Delta T_i = T_i - T_0$ ، نحصل على

$$\Delta U_i = mc\Delta T_i, \quad \Delta R_i = \alpha R_0 \Delta T_i.$$

تصبح معادلات موازنة الطاقة

$$Q = m(c - g\alpha R_0)\Delta T_A, \quad Q = m(c + g\alpha R_0)\Delta T_B,$$

ومن ثم

$$T_A = T_0 + \frac{Q}{m(c - g\alpha R_0)}, \quad T_B = T_0 + \frac{Q}{m(c + g\alpha R_0)}.$$

في الظروف المعتادة، $g\alpha R_0 \ll c$ ، مما يعطي الترتيب المذكور لدرجتي الحرارة.

من الناحية الفيزيائية، تحرر A طاقة وضع ثقالية أثناء تمددها، بينما تستخدم B جزءاً من الطاقة المزودة لرفع مركز كتلتها. ولا يمكن حساب قيمة عددية لفرق درجتي الحرارة من المعلومات المعطاة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.

المسألة 4: الضغط في وعاء مغلق يحتوي على الهواء والماء المتبخر

تعليق: أعدت اللجنة المنظمة ثلاث مسائل نظرية. وللأسف، تزامن موعد الأولمبياد الأول مع امتحانات القبول الجامعي للطلاب الرومانيين في الصف الأخير. لذلك أرسلت رومانيا فريقاً يتألف من طلاب من صفوف أدنى. ولم يكونوا قد درسوا الكهرباء. ولإتاحة الفرصة لهم، أضاف المنظمون (بموافقة المجلس الدولي) المسألة الرابعة المعروضة هنا. وسُمح للطلاب (وليس لطلاب رومانيا وحدهم) باختيار ثلاث مسائل. وكانت الدرجات القصوى الممكنة للمسائل كما يلي: المسألة الأولى – 10 درجات، والمسألة الثانية – 10 درجات، والمسألة الثالثة – 10 درجات، والمسألة الرابعة – 6 درجات. وقد حل المسألة الرابعة 8 طلاب، ولم يحصل على درجاتها الست كاملة سوى أربعة منهم.

يحتوي وعاء مغلق حجمه $V_0 = 10 \text{ l}$ على هواء جاف في الظروف القياسية ($p_0 = 1 \text{ atm}$, $t_0 = 0^\circ\text{C}$). وفي لحظة ما، أُضيفت 3 g من الماء إلى الوعاء وسُخّن النظام إلى $t = 100^\circ\text{C}$. أوجد الضغط داخل الوعاء. ناقش الافتراض الذي اعتمدت عليه لحل المسألة.

نص المسألة مترجم عن النص الإنجليزي الرسمي.

الإجابات

• المسألة 4 (6 درجات): الضغط المطلق النهائي هو

$$p \simeq 1.88 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

تتبخّر كتلة الماء البالغة 3 g بأكملها؛ ويكون البخار الناتج غير مشبع. وتفترض هذه النتيجة أن الوعاء صلب، وأن الهواء لا يتسرب أثناء إضافة الماء، وأن الغازات تسلك سلوك الغاز المثالي، وأن الاتزان الحراري واتزان الأطوار متحققان عند 100°C .

الحل

المسألة 4

نستخدم درجات الحرارة المطلقة:

$$T_0 = 273.15 \text{ K}, \quad T = 373.15 \text{ K}, \quad V_0 = 1.00 \times 10^{-2} \text{ m}^3.$$

بالنسبة إلى خليط مثالي، يعطي قانون دالتون الضغط الكلي بوصفه مجموع الضغطين الجزئيين للهواء وبخار الماء:

$$p = p_a + p_v.$$

كمية مادة الهواء ثابتة. وبتطبيق قانون الغاز المثالي في الحالتين الابتدائية والنهائية، نحصل على

$$n_a = \frac{p_0 V_0}{RT_0}, \quad p_a = \frac{n_a RT}{V_0} = p_0 \frac{T}{T_0}.$$

ومن ثم

$$p_a = 1 \text{ atm} \times \frac{373.15}{273.15} \simeq 1.366 \text{ atm.}$$

علينا تحديد ما إذا كان الماء المضاف يتبخّر كله. فإذا تبخّر كله، كانت كمية مادته

$$n_v = \frac{m}{M} = \frac{3.0 \text{ g}}{18.0 \text{ g mol}^{-1}} = \frac{1}{6} \text{ mol.}$$

ويكون ضغطه الجزئي الموافق

$$p_v^{(\text{all})} = \frac{mRT}{MV_0} = \frac{(1/6)(8.314)(373.15)}{1.00 \times 10^{-2}} \simeq 5.17 \times 10^4 \text{ Pa} \simeq 0.510 \text{ atm.}$$

عند 100°C ، يكون ضغط بخار الماء المشبع تقريباً

$$p_{\text{sat}} = 1 \text{ atm.}$$

وبما أن

$$p_v^{(\text{all})} < p_{\text{sat}},$$

فلن التبخر الكامل أيضاً ينتج بخاراً غير مشبع. ولذلك فإن أي سائل متبقّي سيستمر في التبخر. وبالتالي، يتبخّر الماء كله.

وبصورة مكافئة، فإن كتلة الماء اللازمة لبلوغ حالة الإشباع في الوعاء هي

$$m_{\text{sat}} = \frac{Mp_{\text{sat}}V_0}{RT} \simeq 5.88 \text{ g,}$$

وهي أكبر من الكتلة المتاحة البالغة 3 g. وتتحدد حالة الإشباع وفقاً للضغط الجزئي لبخار الماء.

إذن، يكون الضغط الكلي النهائي

$$p = p_0 \frac{T}{T_0} + \frac{mRT}{MV_0} \simeq 1.366 + 0.510 = 1.876 \text{ atm} \simeq 1.90 \times 10^5 \text{ Pa.}$$

الافتراضات التي تستند إليها هذه النتيجة هي:

- **ثبات حجم الوعاء:** يُهمل التمدد الحراري للوعاء وتشوّهه الناجم عن الضغط.
- **ثبات كمية الهواء:** لا تسمح إضافة الماء بتسرب الهواء، ويظل الوعاء محكم الإغلاق.
- **سلوك الغاز المثالي:** يخضع الهواء وبخار الماء لقانون الغاز المثالي وقانون دالتون. وهذان تقريبان معقولان عند درجة الحرارة والضغط المذكورة.
- **الانزّان:** تُوفّر كمية كافية من الحرارة ويُتاح وقت كافٍ حتى تصل جميع محتويات الوعاء إلى 100°C ويكتمل التبخر. وتؤثر الحرارة الكامنة للتبخر في كمية الحرارة اللازم تزويد النظام بها، لكنها لا تؤثر في الضغط النهائي عند درجة الحرارة المحددة.

تمت مراجعة الحل بمقارنته بالحل الرسمي.